

[문항1] 2016년도 노벨 물리학상은 위상학적 상전이와 위상물질상을 발견한 업적을 기려 David J. Thouless, F. Duncan M. Haldane, J. Michael Kosterlitz에게 수여되었다. 위상학적 상전이 발견에 근간이 된 2차원 XY 모형이 보이는 상전이의 특이성을 renormalization group theory로 살펴보자. ¹ XY 모형의 해밀토니안은 다음과 같다.

$$\beta H_{XY} = -K \sum_{\langle m,n \rangle} \cos(\theta_m - \theta_n). \quad (1)$$

일련의 수학적 변환을 거치면 XY 모형의 분배함수는 위상학적 요동인 vortex의 fugacity y 를 포함하고 있는 고전적인 Sine-Gordon 모형의 꼴로 변형된다.

$$Z(K, y) = \int [\mathcal{D}\phi(\mathbf{r})] \exp \left[\int d^d \mathbf{r} \left\{ -\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + 2y \cos(2\pi\sqrt{K}\phi(\mathbf{r})) \right\} \right]. \quad (2)$$

1. 축척인자가 $b = e^s$ 이고 s 가 매우 작은 극한에서, 변수 $x = \pi K - 2$ 와 y 의 RG 미분꼴 변환식은

$$\frac{dx}{ds} = -y^2, \quad \frac{dy}{ds} = -xy \quad (3)$$

이다. Momentum shell RG 방법을 사용하여 RG 변환식을 유도하시오. ²

2. xy 평면에서 RG 흐름을 그리고 RG 부동점을 구하시오. 또한, 상평형 그림을 그리시오.
3. XY 모형의 physical line은 $y = e^{-\pi^2 K/2}$ 에 해당한다. 상전이 온도 근처에서 계의 상관거리 ξ 는 $\epsilon = (T - T_c)/T_c$ 이 0으로 접근할 때 power law 보다 더 빠르게 발산한다. RG 방정식을 사용하여 상관거리의 비해석적인 ϵ 의존성을 구하시오.

¹참고문헌: Yu. A. Izyumov and Yu. N. Skryabin, *Statistical Mechanics of Magnetically Ordered Systems* (Springer, 1988). (2) J.V. José, L.P. Kadanoff, S. Kirkpatrick, and D.R. Nelson, *Renormalization, vortices, and symmetry-breaking perturbations in the two-dimensional planar model*, Phys. Rev. B **16** 1217 (1977).

² ϕ^4 이론에서 했듯이, y 항을 섭동항으로 간주하여 2차 cumulant까지 전개하면 식 (3)의 결과를 얻을 수 있다. 1번 문항의 결과를 유도하지 못해도 2, 3번 문항을 해결하시오.

[문항2] RG 계산에서 가장 까다로운 단계인 coarse-graining에 전산물리학적 방법을 적용할 수 있다면 매우 유용할 것이다. Swendsen은 선형화된 RG의 변환행렬 Λ_b 을 Monte Carlo 시뮬레이션으로 계산하는 MCRG 방법을 제안하여 스핀모형계의 임계지수를 정밀하게 계산하였다. 그러나 MCRG는 임계점에서만 적용가능하다는 한계가 있어 이를 극복하고자 하는 노력이 계속되고 있다.³ 또다른 방법으로 인공신경망을 활용한 RG 역시 관심을 끌고 있다.⁴ 다음과 같은 사고실험을 생각해보자.

1. 크기가 L^d 인 격자 위에 해밀토니안이 \mathcal{H} 인 Ising 스핀계가 있다. 온도 T 에서 Monte Carlo 시뮬레이션을 사용하여 볼츠만 분포를 따르는 스핀 상태 M 개 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_M\}$ 를 추출한다.
2. b^d 개의 스핀을 한개의 스핀으로 바꾸는 block spin 규칙을 도입해, block spin 계의 상태 $\{\mu_1, \dots, \mu_M\}$ 를 생성한다.
3. 수치적으로 생성한 block spin계의 분포를 볼츠만 분포로 갖는 해밀토니안 \mathcal{H}_b 을 기계학습 방식으로 추론하고, 블록스핀계의 변환된 온도 T_b 을 추출한다.

이러한 방법이 가능하다면 온도 혹은 일반적인 상호작용 변수에 대한 RG 방정식

$$\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}_b = R_b(\mathbf{K}) \quad (4)$$

을 얻을 수 있다.

이러한 방식이 상전이 연구에 적용될 수 있겠는가? 적용가능하다면 2차원 혹은 3차원 Ising 모형의 임계온도 및 임계지수를 구해보시오. 적용불가능하다면 다른 방식을 제안하고 Ising 모형에 적용해보시오.

³참고문헌: D. Ron, A. Brandt, and R.H. Swendsen, *Monte Carlo renormalization-group calculation for the $d = 3$ Ising model using a modified transformation*, Phys. Rev. E **104**, 025311 (2021).

⁴참고문헌: J.-H. Chung and Y.-J. Kao, *Neural Monte Carlo renormalization group*, Phys. Rev. Research **3**, 023230 (2021).