담양 1

2022 담양 여름 학교

강사 : 최성락 (연세대학교)

조교 : 장성욱, 김동현 (연세대학교)

주제: Geometry of algebraic fiber spaces
(Iitaka Conjecture & related problems)

계획

1. Algebraic fiber space 정의.
   Iitaka Conjecture 소개
2. General fiber F 가 generel type 인 경우.
   (f가 smooth 일 때)
3. General fiber F 가 generel type 인 경우.
   (f 가 smooth 가 아닐 때)
4. 관련 결과 & 문제 소개

강의 1 :

모든 이야기는 $\mathbb{C}$ 위에서 진행

정의:

An algebraic fiber space is a surjective morphism $f: X \to Y$ between smooth projective varieties X & Y with connected fibers $F = f^{-1}(y)$, y=general point of Y.

- It is a relative version of algebraic varieties.
- Random X, Y, F do not define alg fiber spaces. (obvious restriction: $\dim X = \dim F + \dim Y$)

There are more fundamental restrictions on X, Y, F given by Kodaira dimension, volumes, etc .

정의 (Kodaira dimension)

$$\kappa(D) = \begin{cases} \max\left\{ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\middle|\, \limsup_{m \to \infty} \frac{h^0(X, \mathcal{O}(mD))}{m^k} > 0 \right\} \\ -\infty \end{cases} \in \{0, 1, \ldots, \dim X\}$$

Iitaka dimension of D

$\kappa(X) := \kappa(K_X)$ Kodaira dimension of X

(모든 divisor 는 Z-divisor, 또는 Q-divisor)

정의 (Volume)

$$\mathrm{vol}(D) = \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X, mD)}{m^d/d!}$$

- Both measure the positivity of the divisor D.
- If D is a divisor on X and if $p(m) = h^0(X, \mathcal{O}_X(mD))$ is a polynomial for all sufficiently large m, then

$$h^0(X, mD) = \frac{a_d}{d!}m^d + \frac{a_{d-1}}{(d-1)!}m^{d-1} + \cdots + a_1 m + a_0$$

where $a_d = \mathrm{vol}_X(D)$ and

degree of $h^0(X, mD) = \kappa(D)$

$\shortparallel$

largest integer s such that $a_s \neq 0$

(Vol 얘기는 나중에 다시...)

- A divisor D is big if $\mathrm{vol}(D) \neq 0$.
- X is of general type if K_X is big.

$\boxed{\text{Easy addition lemma: } \kappa(F) + \dim Y \geq \kappa(X).}$

증명: 더 일반적인 다음 부등식을 증명한다.

$$\kappa(D_y) + \dim Y \geq \kappa(D)$$

$$\left(D_y = D|_{X_y},\ X_y = f^{-1}(y) = F \text{ general fiber}\right)$$

① $\kappa(D) = -\infty$
② $\kappa(D) = 0$
} 연습시간에.

③ $\kappa(D) > 0$

Take m large so that

$\phi_{|mD|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ defines the Iitaka fibration

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{P}^N \times Y \arrow[dl, "p_2"] \arrow[dr, "p_1"] & \\ Y & & \mathbb{P}^N \end{tikzcd}$$

where $\varphi = \phi_{|mD|} \times f$

Let $Z = \operatorname{Im}\varphi \subseteq \mathbb{P}^N \times Y$

$$\begin{aligned} \kappa(D) = \dim p_1(Z) &\leq \dim Z \\ &= \dim Y + \dim Z_y \\ &\leq \dim Y + \kappa(X_y, D_y) \end{aligned}$$

$(y = \text{general pt of } Y)$

Iitaka Conjecture : $\kappa(X) \geq \kappa(F) + \kappa(Y)$

- open since 1972
- many partial results:
    - dim F=1 (Kawamata 1978, 석사논문)
    - F = general type
    - F has a good minimal model
    - Y = general type

    이 경우 $\kappa(X) = \kappa(Y) + \kappa(F)$

    by Easy Addition Lemma.

어쨌든

MMP + Abundance conjecture

$\Rightarrow$ good minimal models exist

$\Rightarrow$ Iitaka Conjecture holds

$X \longrightarrow$ MMP $\longrightarrow X_{min} \longrightarrow$ Abundance Conjecture $\longrightarrow X_{can}$

X_{min}: minimal model (K_X = nef)

X_{can}: canonical model (K_X = ample).

good minimal model =canonical model 을 갖는 minimal model

[Birkar-Cascini-Hacon-Mckernan]:
Variety of general type 은 good minimal model 을 갖는다.

이 강연에서는 F 가 general type 인 경우 Iitaka Conjecture 의 증명을 다뤄본다.

목표 정리 (Iitaka conjecture)

Algebraic fiber space $f: X \to Y$ 에서 general fiber F가 general type 인 경우

$$\kappa(X) \geq \underset{\dim F}{\underset{\shortparallel}{\kappa(F)}} + \kappa(Y)$$ 가 성립한다.

1980-1990:

- Viehweg: K_X 가 Semiample 을 가정하고 증명
- Kawamata가 MMP를 가정하고 증명.
- F가 general type 인 경우 Kollár 가 완벽히 해결.

모두 variation of Hodge Structue 와 같은 어려운 이론에 의존하는 난해한 증명.

이 강연에서는 Variation of Hodge structure을 쓰지 않고
- Birkar-Cascini-Hacon-Mckernan 의 결과
- weakly semistable reduction(Abramovich-Karu)
- Kollár vanishing theorem

과 같은 최신(?) 결과를 이용하는 상대적으로 쉬운 Fujino Osamu 의 증명을 배워본다.

-자세한 내용은 다음 책 참고

Iitaka Conjecture An Introduction,
Osamu Fujino, Springer

$\boxed{\text{증명}}$

Viehweg's Conjecture Q:

$f: X \to Y$ ≿ algebraic fiber space. If $var(f) = \dim Y$, then $f_* \omega_{X/Y}^{\otimes k}$ is a big locally free sheaf for some $k > 0$.

$$\Downarrow$$

Conjecture C+ :

$f: X \to Y$ ≿ algebraic fiber space with general fiber F. Then

$$\kappa(X) \geq \kappa(F) + \max\{var(f), \kappa(Y)\}.$$

$$\Downarrow$$

Iitaka Conjecture C :

If $f: X \to Y$ is an algebraic fiber space with general fiber F, then the following holds :

$$\kappa(X) \geq \kappa(Y) + \kappa(F)$$

Conjecture Q에서..

variation of f = var(f)는 $y \in Y$ 를 움직였을 때 f의 fiber $F=f^{-1}(y)$ 가 nontrivial 하게 deform 하는 공간의 차원

정리 (Viehweg)

var(f)=0 if and only if f is birationally isotrivial.

Birationally isotrivial fiber space란 :

$y \in Y$ 를 어느 방향으로 움직여도 fiber F가 변형 (deform) 되지 않을 때. 대충 $X = F \times Y$ 꼴.

반대로 var(f) = dimY 는 y를 어느 방향으로 움직여도 F가 nontrivial 하게 deform 할 때.

좀더 정확히 말하면. $f: X \to Y$ 의 fiber들을 parametrize 하는 fine moduli space M이 있다고 하면 var(f) = $T: Y \to M$ 의 image 차원. 자세한 var(f)의 정의는 나중에 다시...

아무튼 F가 general type 인 것을 가정하면

Conjecture Q $\Rightarrow$ Conjecture C^{+} $\Rightarrow$ Iitaka Conjecture.

결국 다음 예상만 보이면 된다.

Viehweg's Conjecture Q:
$f: X \to Y$ 는 algebraic fiber space. If $\mathrm{var}(f) = \dim Y$, then $f_* \omega_{X/Y}^{\otimes k}$ is a big locally free sheaf for some $k > 0$.

1 단계. $f: X \to Y$ 가 Smooth morphism 인 경우.

$f_* \omega_{X/Y}^{\otimes m}$ = nef locally free sheaf

for $m = 1$ (Griffith) & $m \geq 1$.

2 단계. If $f: X \to Y$ is weakly semistable,

then $f_* \omega_{X/Y}^{\otimes m}$ = nef locally free sheaf for any $m \geq 0$.

3 단계. 1,2 단계 에서 $\mathrm{Var}(f) = \dim Y$ 을 추가로 가정 하면

$f_* \omega_{X/Y}^{\otimes k}$ = big for some $k > 0$.

4 단계. Viehweg's Conjecture Q 가 참.

$\Rightarrow$ Conjecture C

$\Rightarrow$ Iitaka Conjecture

Remark

모든 과정에서 일단 $f_*\omega_{X/Y}^{\otimes k}$ 의 locally freeness 조건이 반드시 필요.

(증명에서 nef locally free sheaf라는 개념을 사용하고 projection formula를 적용하려면 반드시 필요.)

- Line bundle(=divisor) 가 Cartier (또는 적어도 Q-Cartier) 이어야지 nefness 를 논할 수 있고 pull-back 이 가능한 상황과 비슷하다.