



답양 1

2022 답양 여름 학교

강사 : 최성락 (연세대학교)

조교 : 장성욱, 김동현 (연세대학교)

주제: Geometry of algebraic fiber spaces
(Iitaka Conjecture & related problems)



계획

1. Algebraic fiber space 정의.
Iitaka Conjecture 소개
2. General fiber F 가 general type 인 경우.
(f 가 smooth 일 때)
3. General fiber F 가 general type 인 경우.
(f 가 smooth 가 아닐 때)
4. 관련 결과 & 문제 소개

강의 1:

모든 이야기는 \mathbb{C} 위에서 진행

정의:

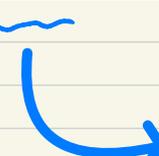
An algebraic fiber space is a surjective morphism $f: X \rightarrow Y$ between smooth projective varieties X & Y with connected fibers $F = f^{-1}(y)$, $y = \text{general point of } Y$.

- It is a relative version of algebraic varieties.
- Random X, Y, F do not define alg fiber spaces.
(obvious restriction: $\dim X = \dim F + \dim Y$)

There are more fundamental restrictions on X, Y, F given by Kodaira dimension, volumes, etc .

정의 (Kodaira dimension)

$$\kappa(D) = \begin{cases} \max \left\{ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{h^0(X, \mathcal{O}(mD))}{m^k} > 0 \right\} \\ -\infty \end{cases} \leftarrow \{0, 1, \dots, \dim X\}$$

 Iitaka dimension of D

$\kappa(X) := \kappa(K_X)$ Kodaira dimension of X

(모든 divisor \simeq \mathbb{Z} -divisor, $\not\simeq$ \mathbb{Q} -divisor)

정의 (Volume)

$$\text{vol}(D) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{h^0(X, mD)}{m^d/d!}$$

- Both measure the positivity of the divisor D .
- If D is a divisor on X and if $p(m) = h^0(X, \mathcal{O}_X(mD))$ is a polynomial for all sufficiently large m , then

$$h^0(X, mD) = \frac{a_d}{d!} m^d + \frac{a_{d-1}}{(d-1)!} m^{d-1} + \dots + a_1 m + a_0$$

where $a_d = \text{vol}_X(D)$ and

degree of $h^0(X, mD) = \nu(D)$

||
largest integer s such that
 $a_s \neq 0$

(Vol 매기는
4중의 다하...)

- A divisor D is big if $\text{vol}(D) \neq 0$.
- X is of general type if K_X is big.

Easy addition lemma: $\kappa(F) + \dim Y \geq \kappa(X)$.

증명: 더 일반적인 다음 부등식을 증명한다.

$$\kappa(D_y) + \dim Y \geq \kappa(D)$$

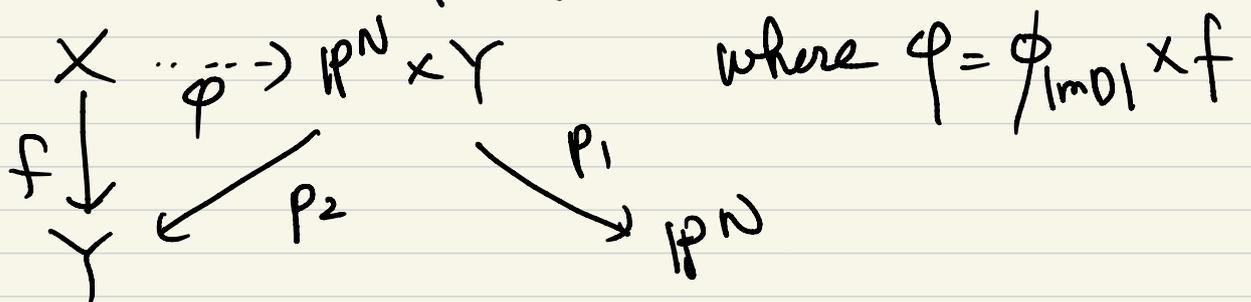
($D_y = D|_{X_y}$, $X_y = f^{-1}(y) = F$ general fiber)

- ① $\kappa(D) = -\infty$
 ② $\kappa(D) = 0$
 ③ $\kappa(D) > 0$
- } 연습시간에.

Take m large so that

$\phi_{(mD)} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ defines the

Irtaka fibration



$$\text{let } Z = \text{Im } \phi \subseteq \mathbb{P}^N \times Y$$

$$\begin{aligned}
 \kappa(D) &= \dim p_1(Z) \leq \dim Z \\
 &= \dim Y + \dim Z_y \\
 &\leq \dim Y + \kappa(X_y, D_y) \\
 &\quad (y = \text{general pt of } Y)
 \end{aligned}$$

Iitaka Conjecture : $\kappa(X) \geq \kappa(F) + \kappa(Y)$

- open since 1972

- many partial results:

- $\dim F=1$ (Kawamata 1978, 석사논문)

- $F =$ general type

- F has a good minimal model

- $Y =$ general type

이 경우 $\kappa(X) = \kappa(Y) + \kappa(F)$

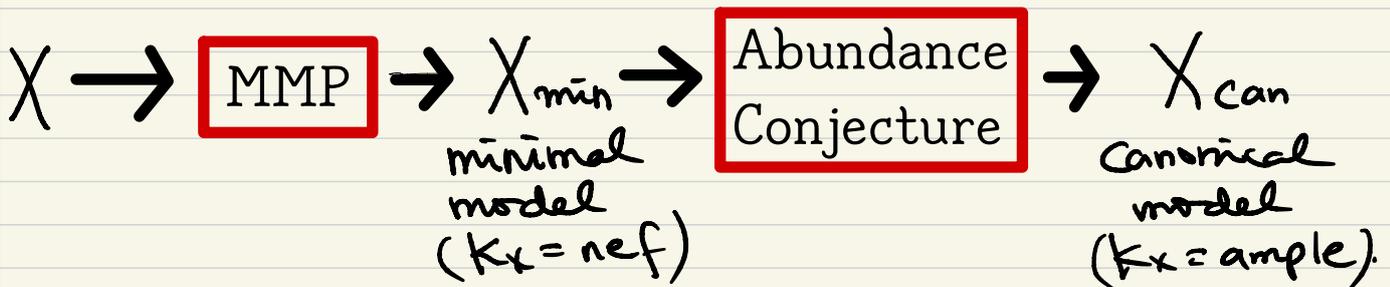
by Easy Addition Lemma.

어쨌든

MMP + Abundance conjecture

\Rightarrow good minimal models exist

\Rightarrow Iitaka Conjecture holds



good minimal model = canonical model 을 갖는 minimal model

[Birkar-Cascini-Hacon-Mckernan]:

Variety of general type 은 good minimal model 을 갖는다.

이 강연에서는 F 가 general type 인 경우 Iitaka Conjecture 의 증명을 다뤄본다.

모든

정리 (Iitaka conjecture)

Algebraic fiber space $f: X \rightarrow Y$ 에서 general fiber F 가 general type 인 경우

$$\kappa(X) \geq \kappa(F) + \kappa(Y)$$

$\dim F$

1980-1990:

- Viehweg: K_X 가 Semiample 을 가정하고 증명
- Kawamata가 MMP를 가정하고 증명.
- F 가 general type 인 경우 Kollar 가 완벽히 해결.

모두 variation of Hodge Structure 와 같은 어려운 이론에 의존하는 난해한 증명.

이 강연에서는 Variation of Hodge structure를 쓰지 않고

- Birkar-Cascini-Hacon-Mckernan 의 결과
- weakly semistable reduction (Abramovich-Karu)
- Kollar vanishing theorem

과 같은 최신(?) 결과를 이용하는 상대적으로 쉬운 Fujino Osamu 의 증명을 배워본다.

- 자세한 내용은 다음 책 참고

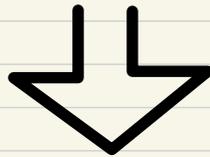
Iitaka Conjecture An Introduction,

Osamu Fujino, Springer

증명

Viehweg's Conjecture Q:

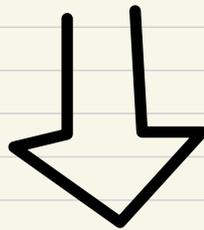
$f: X \rightarrow Y \cong$ algebraic fiber space. If $\text{var}(f) = \dim Y$,
then $f_* \omega_{X/Y}^{\otimes k}$ is a big locally free sheaf for some $k > 0$



Conjecture C+ :

$f: X \rightarrow Y \cong$ algebraic fiber space with general fiber F . Then

$$\kappa(X) \geq \kappa(F) + \max\{\text{var}(f), \kappa(Y)\}.$$



Iitaka Conjecture C :

If $f: X \rightarrow Y$ is an algebraic fiber space with general fiber F , then the following holds :

$$\kappa(X) \geq \kappa(Y) + \kappa(F)$$

Conjecture Q에서..

variation of $f = \text{var}(f)$ 는 $y \in Y$ 를 움직였을 때 f 의 fiber $F=f^{-1}(y)$ 가 nontrivial 하게 deform 하는 공간의 차원

정리 (Viehweg)

$\text{var}(f)=0$ if and only if f is birationally isotrivial.

Birationally isotrivial fiber space란 :

$y \in Y$ 를 어느 방향으로 움직여도 fiber F 가 변형 (deform) 되지 않을 때. 대충 $X = F \times Y$ 꼴.

반대로 $\text{var}(f) = \dim Y$ 는 y 를 어느 방향으로 움직여도 F 가 nontrivial 하게 deform 할 때.

좀더 정확히 말하면. $f: X \rightarrow Y$ 의 fiber들을 parametrize 하는 fine moduli space M 이 있다고 하면 $\text{var}(f) = T: Y \rightarrow M$ 의 image 차원. 자세한 $\text{var}(f)$ 의 정의는 나중에 다시...

아무튼 F 가 general type 인 것을 가정하면

Conjecture Q \Rightarrow Conjecture C^+ \Rightarrow Iitaka Conjecture .

결국 다음 예상만 보이면 된다.

Viehweg's Conjecture Q:

$f: X \rightarrow Y \simeq$ algebraic fiber space. If $\text{var}(f) = \dim Y$,
then $f_* \omega_{X/Y}^{\otimes k}$ is a big locally free sheaf for some $k > 0$.

1 단계. $f: X \rightarrow Y$ 가 Smooth morphism 인 경우.

$f_* \omega_{X/Y}^{\otimes m} =$ nef locally free sheaf

for $m=1$ (Griffith) & $m \geq 1$.

2 단계. If $f: X \rightarrow Y$ is weakly semistable,

then $f_* \omega_{X/Y}^{\otimes m} =$ nef locally free sheaf
for any $m \geq 0$.

3 단계. 1, 2 단계 에서 $\text{Var}(f) = \dim Y$ 을 추가로 가정 하면

$f_* \omega_{X/Y}^{\otimes k} =$ big for some $k > 0$.

4 단계. Viehweg's Conjecture Q 가 참.

\Rightarrow Conjecture C

\Rightarrow Iitaka Conjecture

Remark

모든 과정에서 일단 $f_* \omega_{X/Y}^{\otimes k}$ 의 locally freeness 조건이 반드시 필요.

(증명에서 nef locally free sheaf라는 개념을 사용하고 projection formula를 적용하려면 반드시 필요.)

- Line bundle(=divisor) 가 Cartier (또는 적어도 \mathbb{Q} -Cartier) 이어야지 nefness 를 논할 수 있고 pull-back 이 가능한 상황과 비슷하다.