입자 우주론 기초

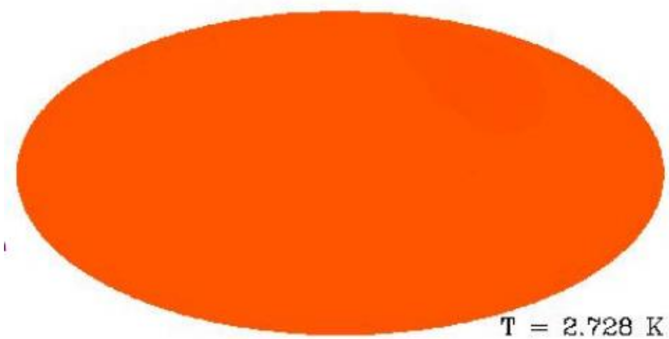
신창섭 (충남대학교)

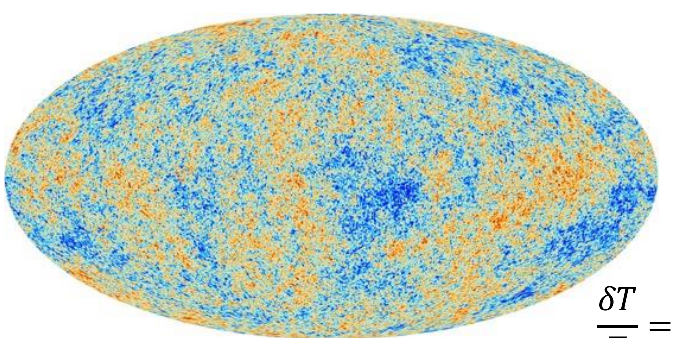
@ KIAS Particle Physics Summer Camp 2022 (Aug. 22-25)

표준 우주론

현재 정립된 표준 우주론은 초기 인플레이션에 의해서 현재 구조를 형성하는 씨앗이 마련되어 거의 균일하고 등방적인 뜨거운 우주에서 출발한 것으로 시작한다. 우주가 팽창하고 식어가면서 각 시기마다 팽창율이 달라지고, 구조가 형성되는데 관측 결과는 현재 우주가 표준모형의 입자들, 암흑물질, 그리고 암흑에너지가 각각 5%, 27% 68% 정도를 차지한다고 하면 잘 설명될 수 있다.

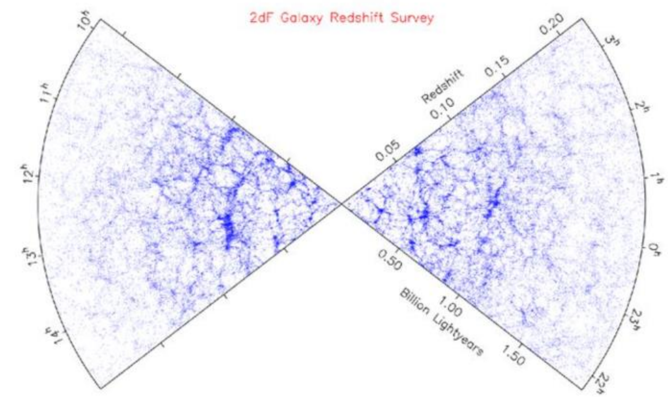
Cosmic Microwave Background



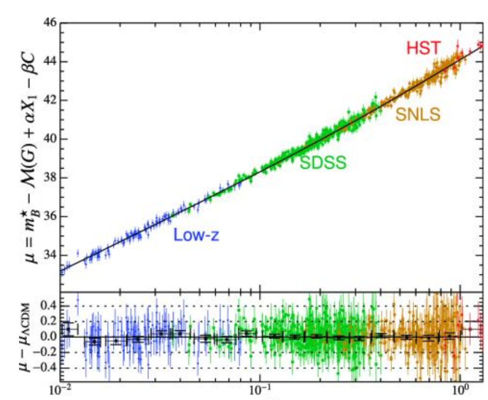


$$\frac{\delta T}{T} = O(10^{-5})$$

Large Scale Structure of the Universe



Expansion of the present Universe

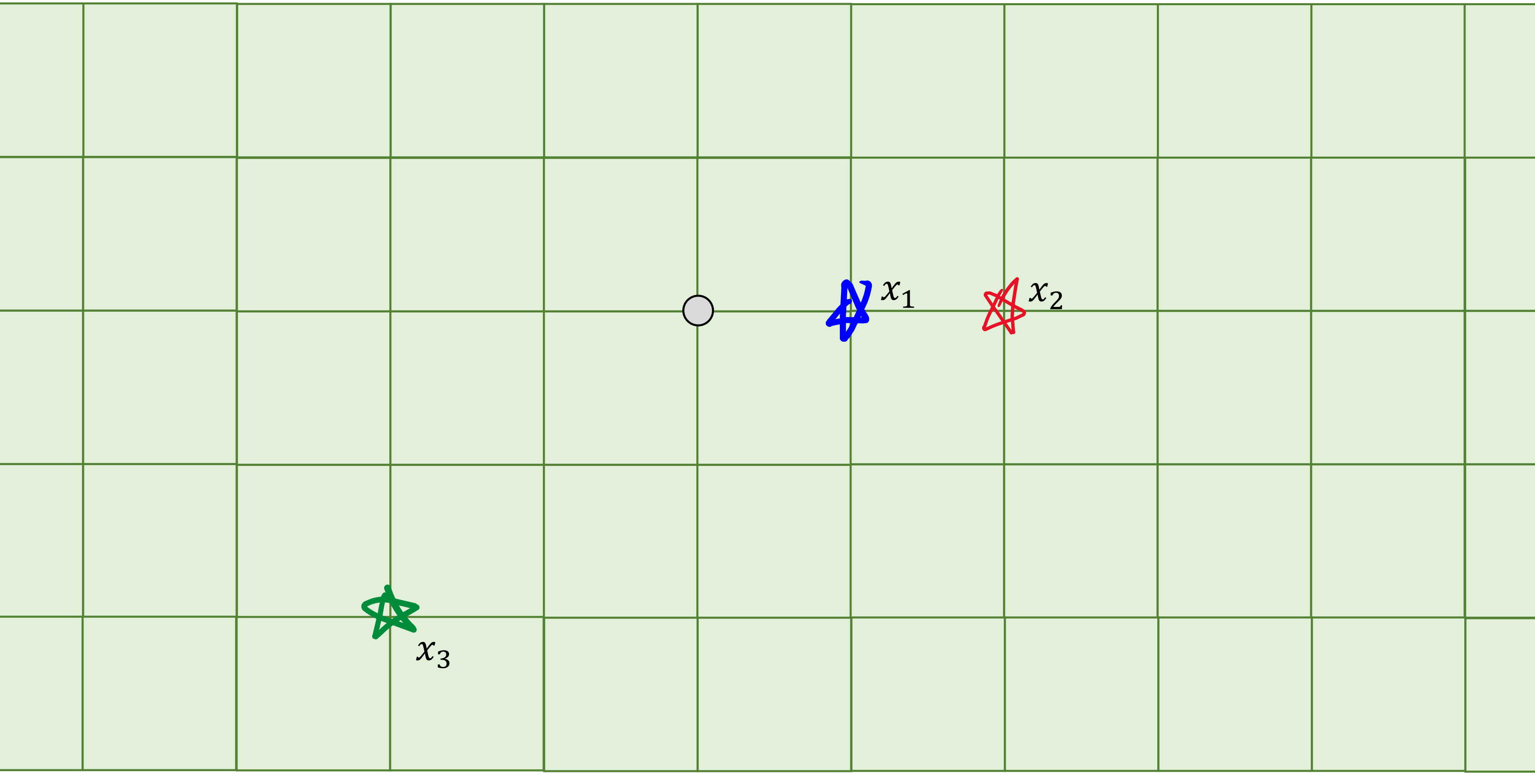


표준 우주론

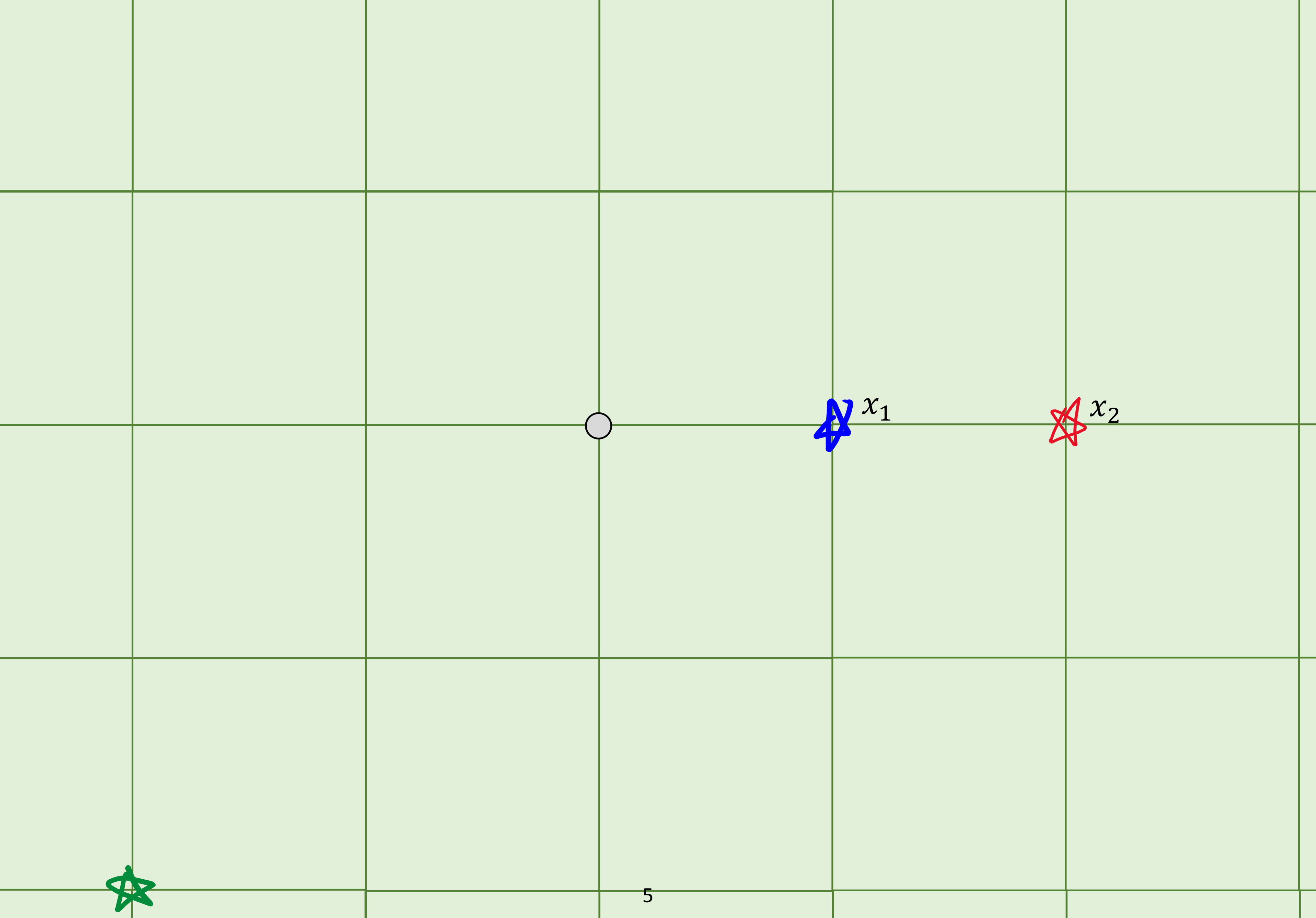
현재 정립된 표준 우주론은 초기 인플레이션에 의해서 현재 구조를 형성하는 씨앗이 마련되어 거의 균일하고 등방적인 뜨거운 우주에서 출발한 것으로 시작한다. 우주가 팽창하고 식어가면서 각 시기마다 팽창율이 달라지고, 구조가 형성되는데 관측 결과는 현재 우주가 표준모형의 입자들, 암흑물질, 그리고 암흑에너지가 각각 5%, 27% 68% 정도를 차지한다고 하면 잘 설명될 수 있다.

이러한 우주적 스케일에서 균일하고 등방적이며 팽창하는 우주는 시공간이 텅 비어 있는 아무것도 아닌 것이 아닌 동적이면서 진화하는 무엇이라는 것을 함축한다. 이번 강의에서는 이렇게 팽창하는 우주에 대한 기초적인 개념을 배우고 그 의미를 공부해보도록 하자.

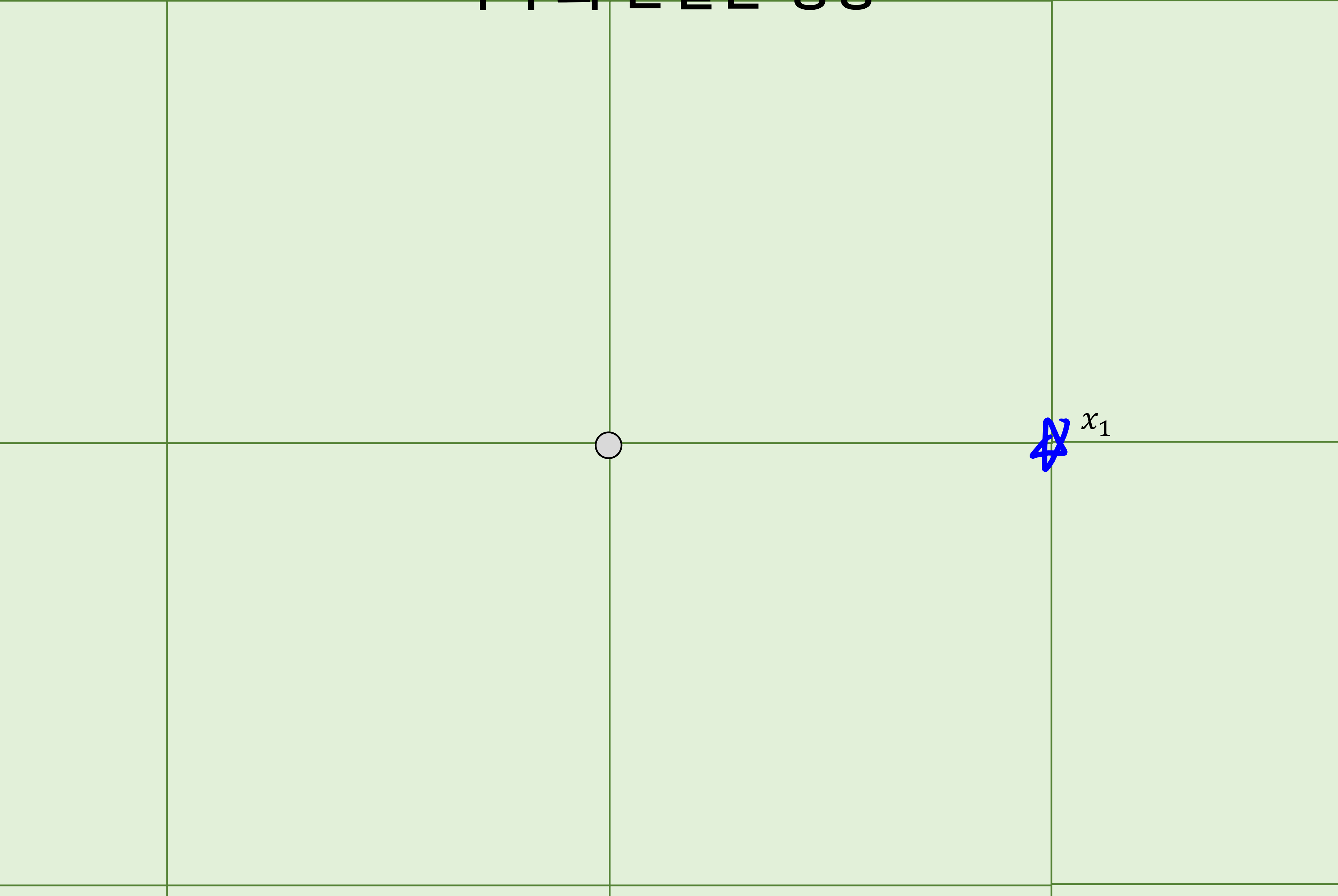
우주의 균일한 팽창



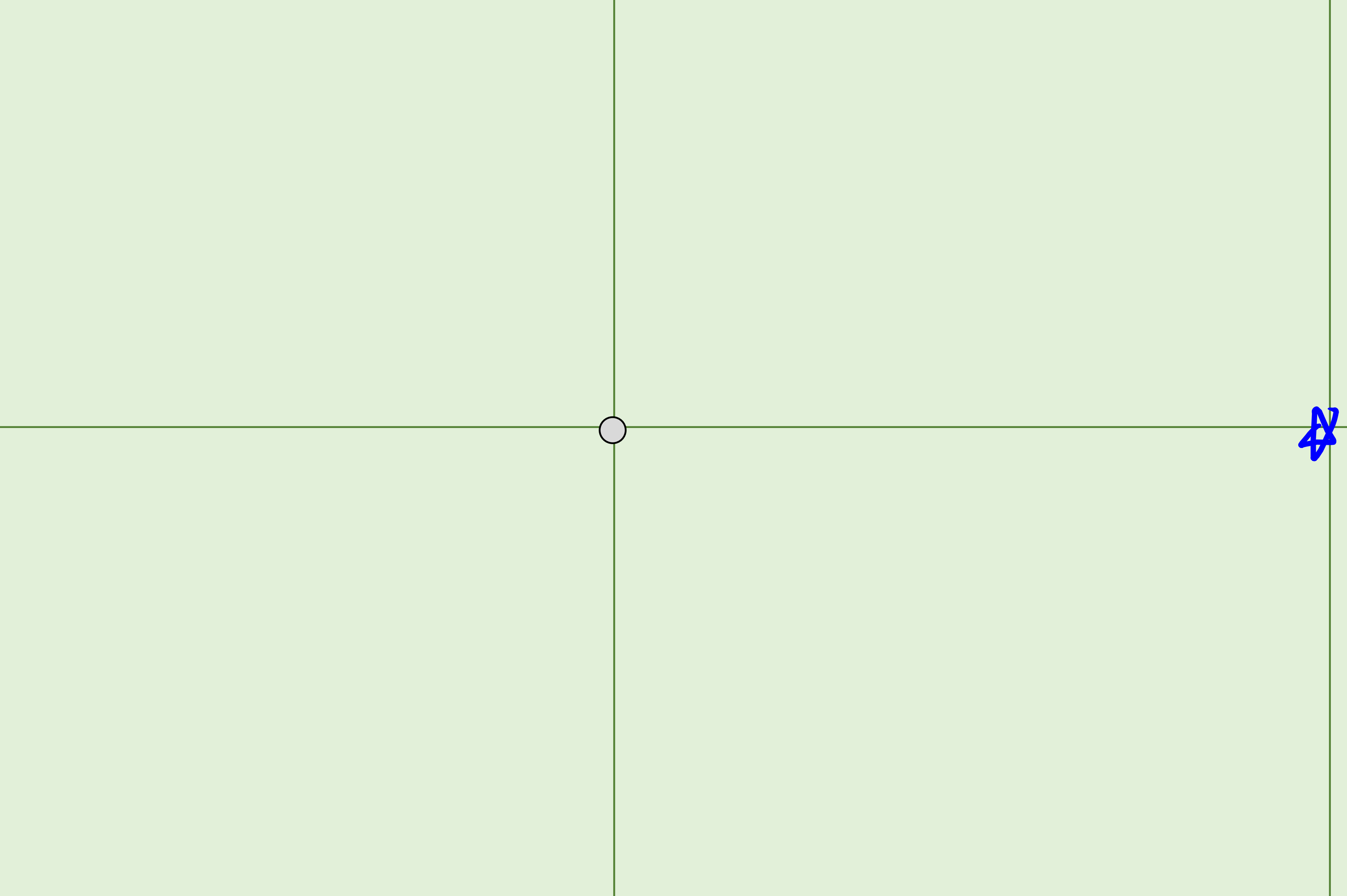
우주의 균일한 팽창



우주의 균일한 팽창

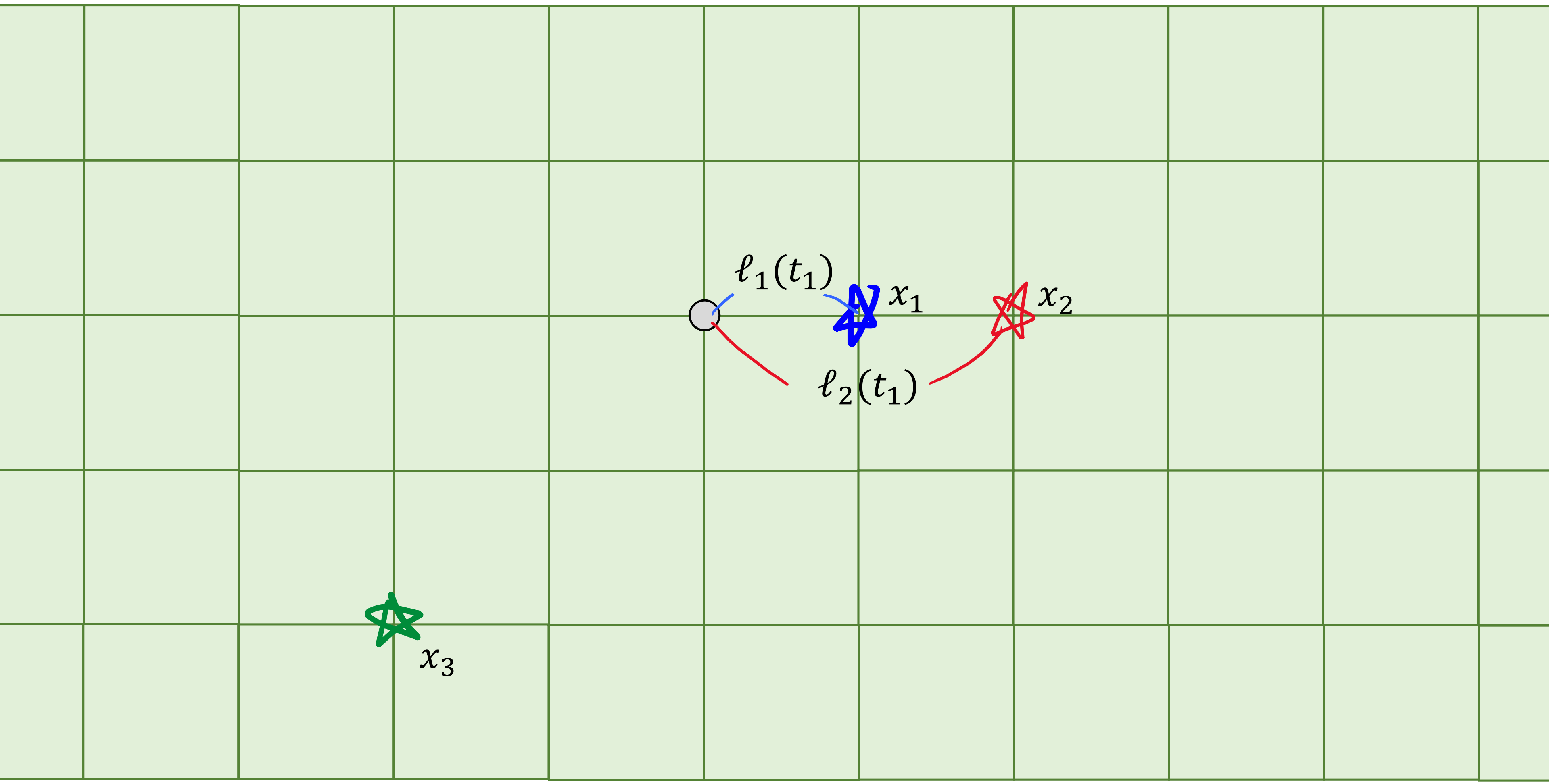


우주의 균일한 팽창



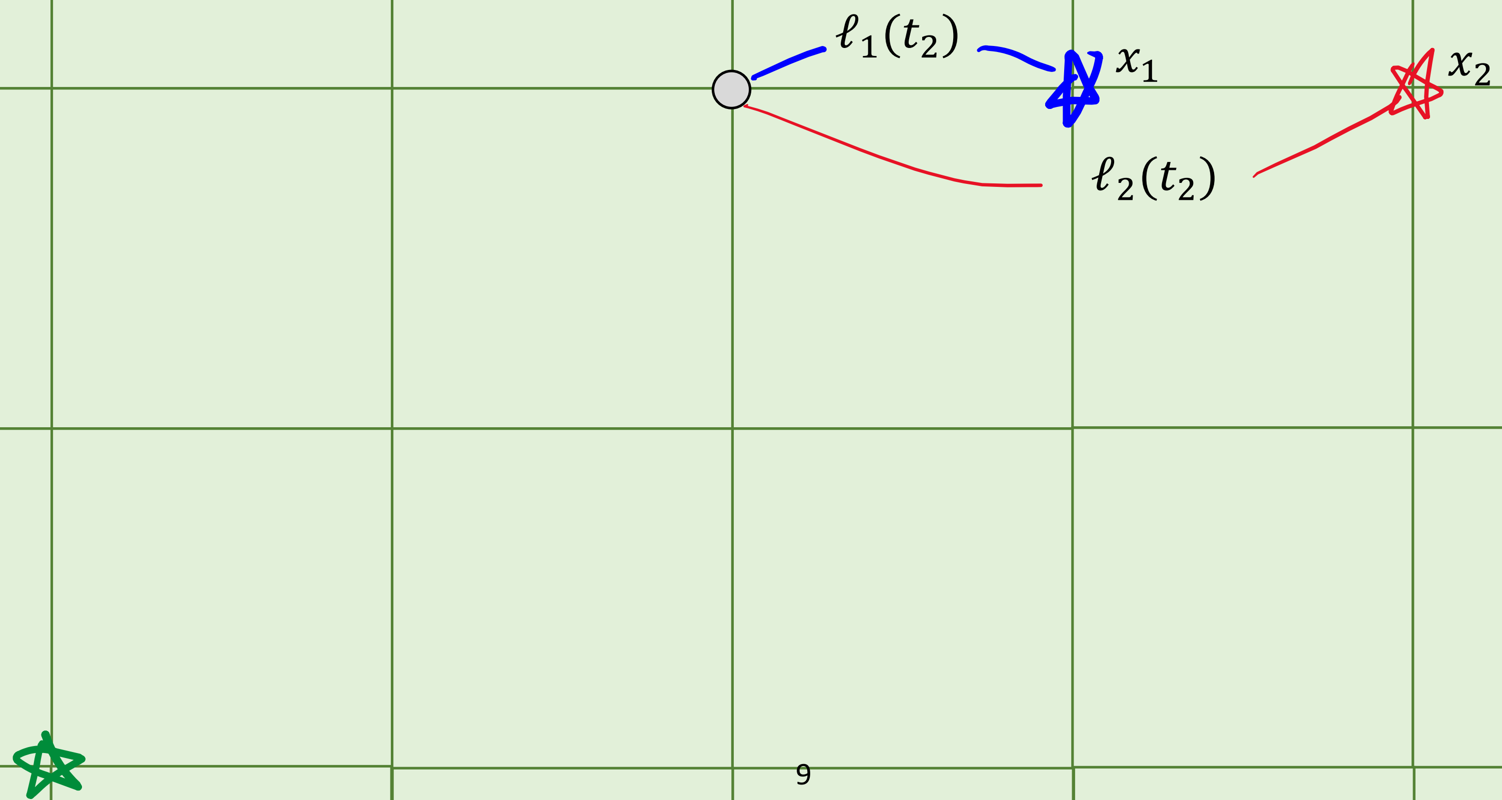
우주의 균일한 팽창

좌표 거리 (x_i) 와 물리적 거리 ($\ell_i(t_1)$)



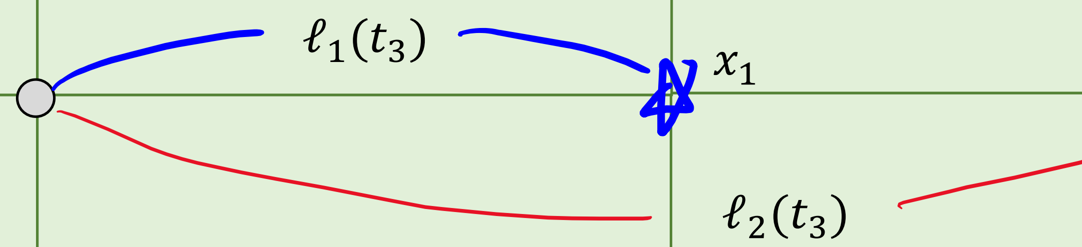
우주의 균일한 팽창

좌표 거리 (x_i) 와 물리적 거리 ($\ell_i(t_2)$)



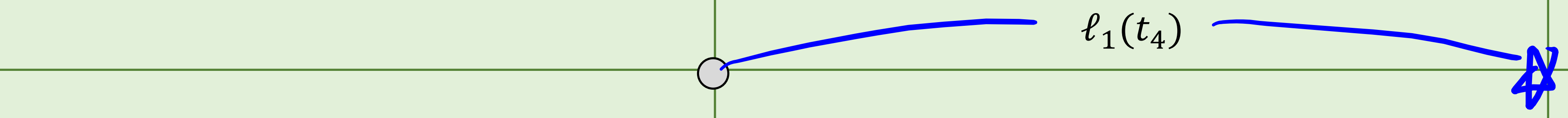
우주의 균일한 팽창

좌표 거리 (x_i) 와 물리적 거리 ($\ell_i(t_3)$)



우주의 균일한 팽창

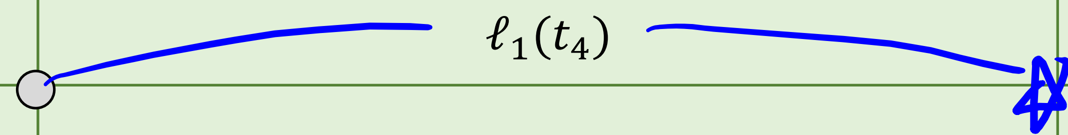
좌표 거리 (x_i) 와 물리적 거리 $(\ell_i(t_4))$



우주의 균일한 팽창

좌표 거리 (x_i) 와 물리적 거리 $(\ell_i(t_4))$

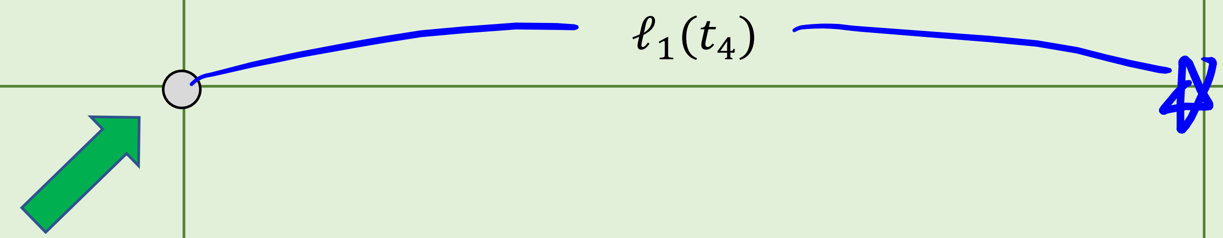
$\ell_i(t) = a(t)\, x_i$: 국소적인 힘에 의해서 좌표를 벗어나는 운동과 구분하여, 우주의 팽창에 의해서 증가하는 물리적 거리를 표현하기 위해 계량(metric)으로써 스케일 펙터 $a(t)$ 을 도입할 수 있다. (모든 공간이 동등한 팽창율로 팽창하는 경우, 계량은 시간의 함수로만 나타낼 수 있다.)



우주의 균일한 팽창

좌표 거리 (x_i) 와 물리적 거리 $(\ell_i(t_4))$

$\ell_i(t) = a(t)\, x_i$: 국소적인 힘에 의해서 좌표를 벗어나는 운동과 구분하여, 우주의 팽창에 의해서 증가하는 물리적 거리를 표현하기 위해 계량(metric)으로써 스케일 펙터 $a(t)$ 을 도입할 수 있다 .
(모든 공간이 동등한 팽창율로 팽창하는 경우, 계량은 시간의 함수로만 나타낼 수 있다.)



이 점은 내가 위치한 위치일 뿐, 우주적으로 전혀 특별한 점이 아니다.
(즉 별까지 거리의 변화는 별의 직접적인 운동이 아니라 중간에 놓여 있는 공간의 팽창의 결과로 멀어지는 것)

우주의 균일한 팽창

좌표 거리 (x_i) 와 물리적 거리 ($\ell_i(t_4)$)

$\ell_i(t) = a(t)\, x_i$: 국소적인 힘에 의해서 좌표를 벗어나는 운동과 구분하여, 우주의 팽창에 의해서 증가하는 물리적 거리를 표현하기 위해 계량(metric)으로써 스케일 펙터 $a(t)$ 을 도입할 수 있다 . (모든 공간이 동등한 팽창율로 팽창하는 경우, 계량은 시간의 함수로만 나타낼 수 있다.)

물리적 거리의 속도

$$v_i(t) = \dot{\ell}_i(t) = \dot{a}(t)\, x_i = \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right) a(t) x_i \equiv H(t)\ell_i(t) \;\Rightarrow\; v_i(t) \propto \ell_i(t)$$

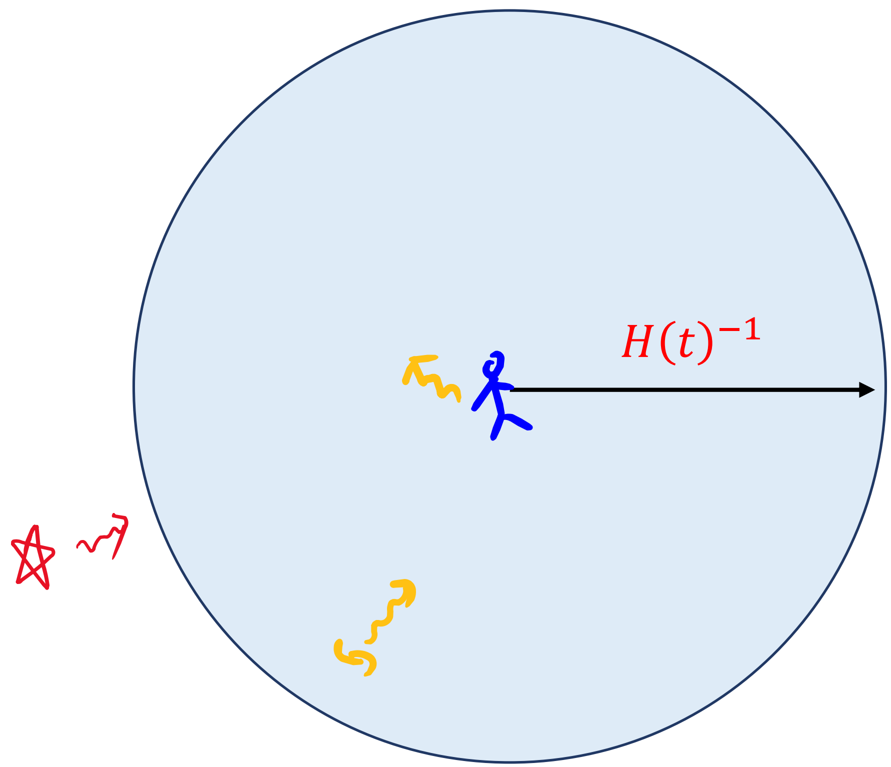
멀어지는 속도는 거리에 비례하고, 비례상수 $H(t) = a'(t)/a(t)$ 를 허블 파라미터라 부른다.

$$H_0 = H(t_{\mathrm{now}}) = 100h\ \mathrm{km/s/Mpc} = (68{\sim}73)\ \mathrm{km/s/Mpc}$$

우주의 균일한 팽창

거리가 $\ell_i(t) > H(t)^{-1}$ 인 곳에서는 $v_i(t) > 1 = c$ 이고 멀어지는 속도는 빛보다 빠르게 되어 구분 되어지고, 그러 의미에서 $1/H(t)$ 를 허블 반경 (혹은 Hubble Horizon)이라고 한다.

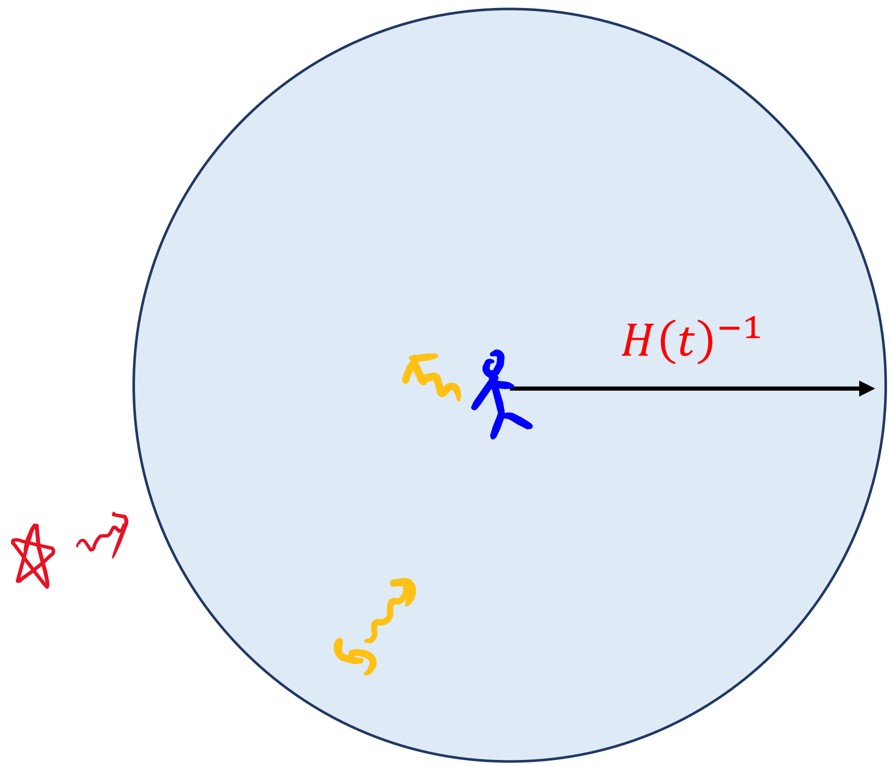
Q. 허블 반경 밖에서 출발한 빛은 우리에게 도달 할 수 있을까?



우주의 균일한 팽창

거리가 $\ell_i(t) > H(t)^{-1}$ 인 곳에서는 $v_i(t) > 1 = c$ 이고 멀어지는 속도는 빛보다 빠르게 되어 구분 되어지고, 그러 의미에서 $1/H(t)$ 를 허블 반경 (혹은 Hubble Horizon)이라고 한다.

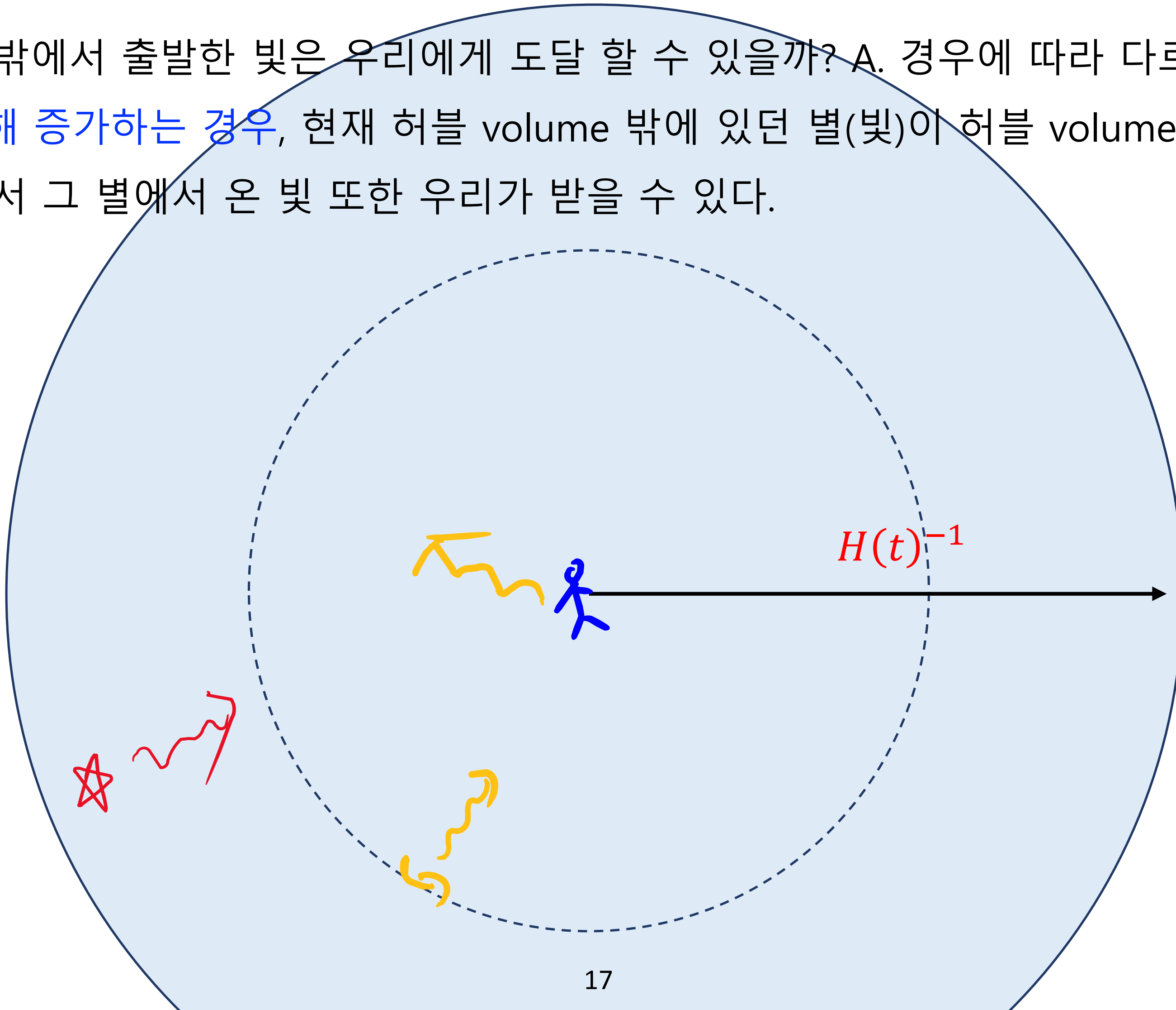
Q. 허블 반경 밖에서 출발한 빛은 우리에게 도달 할 수 있을까? A. 경우에 따라 다르다... 허블 반경이 시간에 대해 증가하는 경우, 현재 허블 volume 밖에 있던 별(빛)이 허블 volume 안으로 들어올 수 있고, 따라서 그 별에서 온 빛 또한 우리가 받을 수 있다.



우주의 균일한 팽창

거리가 $\ell_i(t) > H(t)^{-1}$ 인 곳에서는 $v_i(t) > 1 = c$ 이고 멀어지는 속도는 빛보다 빠르게 되어 구분되어지고, 그러 의미에서 $1/H(t)$ 를 허블 반경 (혹은 Hubble Horizon)이라고 한다.

Q. 허블 반경 밖에서 출발한 빛은 우리에게 도달 할 수 있을까? A. 경우에 따라 다르다... 허블 반경이 시간에 대해 증가하는 경우, 현재 허블 volume 밖에 있던 별(빛)이 허블 volume 안으로 들어올 수 있고, 따라서 그 별에서 온 빛 또한 우리가 받을 수 있다.



우주의 균일한 팽창

거리가 $\ell_i(t) > H(t)^{-1}$ 인 곳에서는 $v_i(t) > 1 = c$ 이고 멀어지는 속도는 빛보다 빠르게 되어 구분되어지고, 그러 의미에서 $1/H(t)$ 를 허블 반경 (혹은 Hubble Horizon)이라고 한다.

Q. 허블 반경 밖에서 출발한 빛은 우리에게 도달 할 수 있을까? A. 경우에 따라 다르다... 허블 반경이 시간에 대해 증가하는 경우, 현재 허블 volume 밖에 있던 별(빛)이 허블 volume 안으로 들어올 수 있고, 따라서 그 별에서 온 빛 또한 우리가 받을 수 있다.

따라서 실제로 빛이 **주어진 시간 동안 얼마나 이동할 수 있는지**를 확인해야 과거와 현재, 그리고 미래에서 인과적으로 연결될 수 있는 최대 영역에 대한 정보를 얻을 수 있다.

태초부터 주어진 우주의 나이까지 빛이 이동한 거리는 그 시간까지 인과적으로 연결될 수 있는 거리를 의미하며 이를 Particle Horizon 혹은 Cosmological Horizon이라 한다.

한편, 현재 출발한 빛이 먼 미래를 고려해도 이동할 수 있는 최대거리가 유한하다면 이는 아무리 시간이 흐르더라도 우리가 인과적으로 연결될 수 있는 영역이 제한적이라는 것이므로 (즉 그 너머는 우리가 영영 관측할 수 없다는 의미) 이를 Event Horizon 이라 한다.

호라이즌 계산해보기

현재의 시간을 t_0, 이 때의 $a(t_0) = 1$ 이라 할 때 빛의 경로는 $ds^2 = dt^2 - a(t)^2 dx^2 = 0$ 따라서 $\Rightarrow$ $dx = dt/a(t) \equiv d\eta$, Particle Horizon : $d_p = \int dx = \int^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$, Event Horizon : $d_e = \int_{t_0} \frac{dt}{a(t)}$

η =Conformal time

여기서 뒤에서 다룰 2가지 경우에 대해 그 값을 구해보자.

예1) $a(t) = \sqrt{t/t_0}$, $H(t) = 1/2t$, 예2) $a(t) = e^{H_0(t-t_0)}$, $H(t) = H_0$

호라이즌 계산해보기

현재의 시간을 t_0, 이 때의 $a(t_0) = 1$ 이라 할 때 빛의 경로는 $ds^2 = dt^2 - a(t)^2 dx^2 = 0$ 따라서 $\Rightarrow$ $dx = dt/a(t) \equiv d\eta$, Particle Horizon : $d_p = \int dx = \int^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$, Event Horizon : $d_e = \int_{t_0} \frac{dt}{a(t)}$

η =Conformal time

여기서 뒤에서 다룰 2가지 경우에 대해 그 값을 구해보자.

예1) $a(t) = \sqrt{t/t_0}$, $H(t) = 1/2t$, 예2) $a(t) = e^{H_0(t-t_0)}$, $H(t) = H_0$

예1) $d_p = H_0^{-1}$, $d_e = \infty$,

예2) $d_p = H_0^{-1} e^{H_0(t_0 - t_{\text{ini}})} \to \infty$ for $t_{\text{ini}} \to -\infty$, $d_e = H_0^{-1}$

즉 예1) 은 현재 허블 반경 밖의 사건들은 과거에 서로 인과적으로 연결되어 있지 않지만, 미래에는 모든 영역이 인과적으로 연결될 수 있다.

반면에 예2) 는 시작하는 시점에 따라 현재의 허블 반경보다 훨씬 더 큰 영역의 사건들이 과거에 서로 인과적으로 연결될 수 있다. 하지만 미래에는 오직 허블 반경 안의 사건들만 인과적으로 연결 된다.

예1은 감속 팽창으로 radiation 이 우주를 지배하는 경우, 예2는 가속 팽창의 전형적인 예이다.

거리와 척도

물리적 거리(physical distance)와 우주의 팽창에 영향을 받지 않는 좌표 거리(comoving distance) 사이의 관계 $\Delta \ell_i(t) = a(t)\,\Delta x_i$ 를 시간을 포함한 임의의 좌표 변환에 대해서도 일반적으로 적용하기 위해 metric tensor 를 도입하여 physical 한 metric을 정의할 수 있다.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (x^\mu = t, x, y, z)$$

앞에서 살펴본 경우는 다음과 같이 metric이 주어진 경우에 해당한다.

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 d\vec{x}^2 = dt^2 - d\vec{\ell}^2$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -a(t)^2 & & \\ & & -a(t)^2 & \\ & & & -a(t)^2 \end{pmatrix}$$

거리와 척도

물리적 거리(physical distance)와 우주의 팽창에 영향을 받지 않는 좌표 거리(comoving distance) 사이의 관계 $\Delta\ell_i(t) = a(t)\,\Delta x_i$ 를 시간을 포함한 임의의 좌표 변환에 대해서도 일반적으로 적용하기 위해 metric tensor 를 도입하여 physical 한 metric을 정의할 수 있다.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (x^\mu = t, x, y, z)$$

앞에서 살펴본 경우는 다음과 같이 metric이 주어진 경우에 해당한다.

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 d\vec{x}^2 = dt^2 - d\vec{\ell}^2$$

우주의 metric tensor $g_{\mu\nu}(t, x, y, z)$가 상수가 아니라 시간에 대해 변화된다는 것은 그에 대한 동역학 즉, "metric tensor field"의 time evolution을 결정하는 방정식이 존재해야 함을 의미한다.

아인슈타인 방정식은 물질에 의해 metric tensor가 energy momentum tensor에 의해 어떻게 시간에 대해 진화하는지, 공간적인 분포가 어떻게 되는지에 대한 정보를 제공한다.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\,T_{\mu\nu} \quad \left(\Rightarrow D_\mu T^{\mu\nu} = 0\right)$$

$R_{\mu\nu} \sim \partial^2 g_{\mu\nu}$

우주의 시공간적 휘어짐

우주 팽창의 소스

동역학적 시공간 배경에서의 에너지-모멘텀 보존을 함의

에너지 모멘텀 텐서

에너지 모멘텀 텐서는 에너지와 운동량, 그리고 이들의 방향에 따른 흐름에 대한 정보를 제공한다.

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \text{에너지 밀도 } (T^{00}) & \text{운동량 밀도 } (T^{0i}) \\ \text{에너지 흐름 } (T^{i0}) & \text{운동량 흐름 } (T^{ij}) \end{pmatrix}$$

Single particle 의 모임인 경우,

$$T^{\mu\nu}(t,\vec{x}) = \sum_i \gamma_i m_i v_i^{\mu} v_i^{\nu} \delta^3\left(\vec{x} - \vec{x}_{p_i}(t)\right) \qquad \left(v_i^{\mu} = (1, d\vec{x}_{p_i}/dt)\right)$$

Field 의 경우, 일반적인 장 Φ_A에 대하여

$$T^{\mu\nu}(x) = \sum_A \frac{\partial L(x)}{\partial\left(\partial_\mu \Phi_A(x)\right)} \partial^\nu \Phi_A(x) - g^{\mu\nu} L(x)$$

에너지 모멘텀 텐서

에너지 모멘텀 텐서는 에너지와 운동량, 그리고 이들의 방향에 따른 흐름에 대한 정보를 제공한다.

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \text{에너지 밀도 } (T^{00}) & \text{운동량 밀도 } (T^{0i}) \\ \text{에너지 흐름 } (T^{i0}) & \text{운동량 흐름 } (T^{ij}) \end{pmatrix}$$

Single particle 의 모임인 경우,

$$T^{\mu\nu}(t,\vec{x}) = \sum_i \gamma_i m_i v_i^\mu v_i^\nu \delta^3\left(\vec{x} - \vec{x}_{p_i}(t)\right) \qquad \left(v_i^\mu = (1, d\vec{x}_{p_i}/dt)\right)$$

Field 의 경우, 일반적인 장 Φ_A에 대하여

$$T^{\mu\nu}(x) = \sum_A \frac{\partial L(x)}{\partial\left(\partial_\mu \Phi_A(x)\right)} \partial^\nu \Phi_A(x) - g^{\mu\nu} L(x)$$

Perfect Fluid 로 근사할 수 있는 밀도가 큰 유체의 경우, Fluid rest frame 에서의 밀도 ρ, 압력 P, 그리고 Fluid 의 bulk four-velocity u^μ 에 대하여

$$T^{\mu\nu}(x) = (\rho + P)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu} \;\Rightarrow\; \text{Fluid rest frame : } T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$$

에너지 모멘텀 텐서

우주에 고르게 퍼져 있는 물질의 밀도와 압력의 관계를 통해 물질의 종류를 radiation, matter, etc. 로 구분한다. 주어진 질량 m 을 가지고 서로 상호작용 하는 입자들의 주어진 시간에서의 분포 $f(p,t)$ 를 생각해보자. 개수밀도, 에너지밀도, 압력은 각각 아래와 같다. ($E = \sqrt{m^2 + p^2}$)

$$n = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(p,t)\,, \qquad \rho = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E\, f(p,t)\,, \qquad P = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{3E} f(p,t)$$

에너지 모멘텀 텐서

우주에 고르게 퍼져 있는 물질의 밀도와 압력의 관계를 통해 물질의 종류를 radiation, matter, etc. 로 구분한다. 주어진 질량 m 을 가지고 서로 상호작용 하는 입자들의 주어진 시간에서의 분포 $f(p,t)$ 를 생각해보자. 개수밀도, 에너지밀도, 압력은 각각 아래와 같다. ($E = \sqrt{m^2 + p^2}$)

$$n = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(p,t)\,, \qquad \rho = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E\, f(p,t)\,, \qquad P = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{3E} f(p,t)$$

1) 운동량 p 가 m 보다 훨씬 큰 영역이 주로 기여하는 경우, $p \simeq E$,

$$P = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{3E} f(p,t) \simeq \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E^2}{3E} f(p,t) = \frac{1}{3}\rho, \qquad \rho \simeq \langle p \rangle n \qquad \boxed{P \approx \frac{1}{3}\rho}$$

2) 운동량 p 가 m 보다 훨씬 작은 영역이 주로 기여하는 경우, $p \simeq mv \ll E \simeq m$,

$$P = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{3E} f(p,t) \simeq \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{(mv)^2}{3m} f(p,t) = \frac{1}{3}\langle v^2 \rangle \rho \ll \rho, \qquad \rho \simeq mn \qquad \boxed{P \approx 0}$$

우주론적 관점에서 1) $P = \rho/3$ 을 따르면 radiation, 2) $P = 0$ 를 따르면 matter 로 통칭한다.

에너지 모멘텀 텐서

3) 시간에만 의존하는 스칼라 장의 경우 $\phi(t)$, $L \simeq \frac{1}{2}\dot{\phi}(t)^2 - V(\phi)$

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \qquad P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

3.1) $\dot{\phi}^2 \gg V$ $\rho \simeq \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \simeq p$ $P \approx \rho$

3.2) $\dot{\phi}^2 \ll V$ $\rho \simeq V \simeq -p$ $P \approx -\rho$

4) "우주" 상수가 라그랑지안에 있는 경우, $L = -\Lambda \;\Rightarrow\; T^{\mu}_{\ \nu} = -\delta^{\mu}_{\nu}\Lambda \;\Rightarrow\; \rho = \Lambda = -P$ $P = -\rho$

에너지 모멘텀 텐서

3) 시간에만 의존하는 스칼라 장의 경우 $\phi(t)$, $\quad L \simeq \frac{1}{2}\dot{\phi}(t)^2 - V(\phi)$

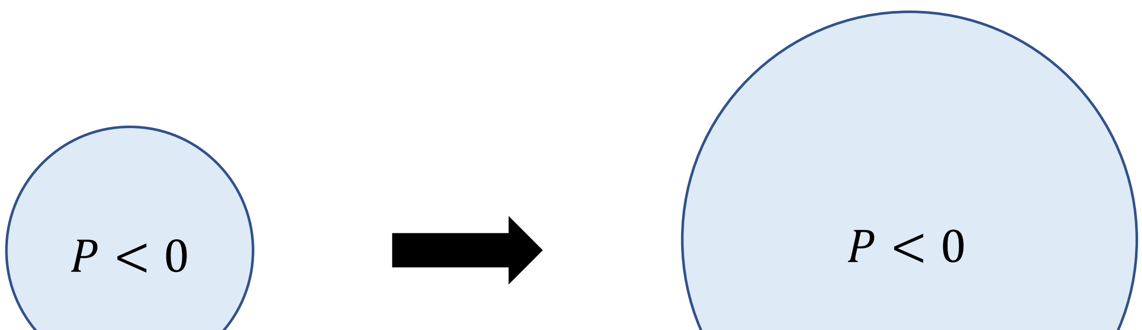
$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \qquad P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

3.1) $\dot{\phi}^2 \gg V \quad \rho \simeq \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \simeq p \quad P \approx \rho$

3.2) $\dot{\phi}^2 \ll V \quad \rho \simeq V \simeq -p \quad P \approx -\rho$

4) "우주" 상수가 라그랑지안에 있는 경우, $L = -\Lambda \;\Rightarrow\; T^{\mu}{}_{\nu} = -\delta^{\mu}_{\nu}\Lambda \;\Rightarrow\; \rho = \Lambda = -P \qquad P = -\rho$

3.2) 와 4) 의 경우, 에너지 밀도가 양수라면 압력은 **음수**가 되고 이는 유체의 부피가 단열적으로 커지는 경우 "음의 일을 하면서 부피 안의 전체 에너지는 증가"함을 의미한다.

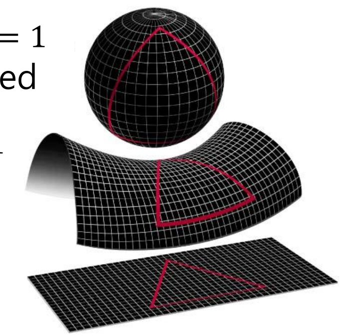


$$U(V_1) \to U(V_2) > U(V_1)$$

$$V_1 \to V_2 > V_1$$

프리드만 방정식 (Friedmann equations)

에너지 모멘텀 텐서가 우주 시공간의 진화에 어떻게 영향을 끼치는지 살펴보자. 가장 단순한 경우로 우주에 밀도가 고르게 분포하여 균일성과 등방성을 유지한다고 할 때, 즉 $\rho(t,x) \approx \rho(t)$, $P(t,x) \approx P(t)$. 이것이 소스가 되어 줄 수 있는 메트릭은 다음의 세가지로 항상 표현할 수 있고 이를 프리드만-르메트르-로버트슨-워커 계량 (FLRW metric)이라 한다.



$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2\left(\frac{dr^2}{1-Kr} + r^2 d\Omega^2\right) \qquad (K = 1,0,-1)$$

아인슈타인 방정식은 다음의 프리드만 방정식으로 이어진다.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}, \qquad \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)$$

또한 두 방정식의 조합으로 에너지 모멘텀 보존관계 $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ 가 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d(\rho V)}{dt} = -P\frac{dV}{dt} \qquad \left(H = \frac{\dot{a}}{a}, V = a^3\right)$$

프리드만 방정식 (Friedmann equations)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}, \qquad \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)$$

1. Ricci scalar curvature $R = 6\left(\underbrace{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a}}_{\text{Temporal curvature}} + \underbrace{\frac{K}{a^2}}_{\text{Spatial curvature}}\right)$ 즉 우주의 팽창은 시간방향의 곡률로 해석된다.

우주 관측을 통해 우주의 공간 곡률은 시간 곡률에 비해 매우 작음이 알려졌다. 즉 우주의 토폴로지는 아직 모르지만 미분 기하학적으로는 거의 평평하다 (Flat Universe)

$$\left|\frac{K}{a_0^2}\right| < 0.01\, H_0^2 \;\Rightarrow \rho_0 \approx \frac{3H_0^2}{8\pi G} \qquad (H_0, a_0, \rho_0 = H(t_0), a(t_0), \rho_0(t_0), \qquad t_0 = t_{\text{now}})$$

프리드만 방정식 (Friedmann equations)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}, \qquad \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)$$

Temporal curvature Spatial curvature

1. Ricci scalar curvature $R = 6\left(\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2}\right)$ 즉 우주의 팽창은 시간방향의 곡률로 해석된다.

우주 관측을 통해 우주의 공간 곡률은 시간 곡률에 비해 매우 작음이 알려졌다. 즉 우주의 토폴로지는 아직 모르지만 미분 기하학적으로는 거의 평평하다 (Flat Universe)

$$\left|\frac{K}{a_0^2}\right| < 0.01\, H_0^2 \quad \Rightarrow \rho_0 \approx \frac{3H_0^2}{8\pi G} \qquad (H_0, a_0, \rho_0 = H(t_0), a(t_0), \rho_0(t_0), \qquad t_0 = t_{\text{now}})$$

2. Time reversal symmetry: $t \to -t$ 변환에 대해 방정식이 대칭적이다. 이는 주어진 에너지 모멘텀 텐서의 초기 조건 (ρ, P) 에 대해서 팽창하는 해 $(\dot{a} > 0)$ 가 있다면 수축하는 해 $(\dot{a} < 0)$ 도 존재함을 의미한다. 하지만 팽창하는 해가 실현됨으로써 시간 대칭성은 자발적으로 깨지게 된다.

프리드만 방정식 (Friedmann equations)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}, \qquad \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)$$

Temporal curvature　Spatial curvature

1. Ricci scalar curvature $R = 6\left(\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2}\right)$ 즉 우주의 팽창은 시간방향의 곡률로 해석된다.

우주 관측을 통해 우주의 공간 곡률은 시간 곡률에 비해 매우 작음이 알려졌다. 즉 우주의 토폴로지는 아직 모르지만 미분 기하학적으로는 거의 평평하다 (Flat Universe)

$$\left|\frac{K}{a_0^2}\right| < 0.01\, H_0^2 \quad \Rightarrow \rho_0 \approx \frac{3H_0^2}{8\pi G} \qquad (H_0, a_0, \rho_0 = H(t_0), a(t_0), \rho_0(t_0), \qquad t_0 = t_{\rm now})$$

2. Time reversal symmetry: $t \to -t$ 변환에 대해 방정식이 대칭적이다. 이는 주어진 에너지 모멘텀 텐서의 초기 조건 (ρ, P) 에 대해서 팽창하는 해 $(\dot{a} > 0)$ 가 있다면 수축하는 해 $(\dot{a} < 0)$ 도 존재함을 의미한다. 하지만 팽창하는 해가 실현됨으로써 시간 대칭성은 자발적으로 깨지게 된다.

3. $\rho + 3P > 0$: 감속 팽창 ($\ddot{a} < 0$ radiation, matter 등이 에너지를 지배하는 경우 $\rho, P > 0$),

$\rho + 3P < 0$: 가속 팽창 ($\ddot{a} > 0$ 우주 상수, 스칼라 퍼텐셜이 에너지를 지배하는 경우 $P < -\rho/3$)

프리드만 방정식 (Friedmann equations)

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \ \Rightarrow \ \frac{d(\rho V)}{dt} = -P\frac{dV}{dt} \qquad \left(H = \frac{\dot{a}}{a}, V = a^3\right)$$

1. $V = a^3$ 은 단위 comoving volume 당 physical volume 이고 현재 우주에서 $a_0 = 1$ 로 둠으로써 comoving volume (distance) 의 값은 현 시점에서의 physical volume (distance) 에 대응한다. e.g.) 과거 시간 t_* 일 때 $a(t_*) = 0.01$ 라고 하자. 이 시간까지 빛이 1pc의 comoving distance 를 이동했다면, 그 당시의 척도로 측정한 물리적 이동 거리는 $\ell(t_*) = a(t_*)1\text{pc} = 0.01\text{pc}$ 이고, 해당 변위를 현재의 척도로 측정한 거리는 $\ell(t_0) = a_0 1\text{pc} = 1\text{pc}$ 이다.

프리드만 방정식 (Friedmann equations)

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \ \Rightarrow \ \frac{d(\rho V)}{dt} = -P\frac{dV}{dt} \quad \left(H = \frac{\dot{a}}{a}, V = a^3\right)$$

1. $V = a^3$ 은 단위 comoving volume 당 physical volume 이고 현재 우주에서 $a_0 = 1$ 로 둠으로써 comoving volume (distance) 의 값은 현 시점에서의 physical volume (distance) 에 대응한다. e.g.) 과거 시간 t_* 일 때 $a(t_*) = 0.01$ 라고 하자. 이 시간까지 빛이 1pc의 comoving distance 를 이동했다면, 그 당시의 척도로 측정한 물리적 이동 거리는 $\ell(t_*) = a(t_*)1\text{pc} = 0.01\text{pc}$ 이고, 해당 변위를 현재의 척도로 측정한 거리는 $\ell(t_0) = a_0 1\text{pc} = 1\text{pc}$ 이다.

2. 팽창하는 물리적 부피 안의 에너지 $U = \rho V$ 는 보존되지 않고 공간의 팽창 동안 일을 함으로써 공간으로 에너지를 잃거나 $(P > 0)$, 얻게 된다. $(P < 0)$. 만약에 물질이 열적 평형상태에 있어서 온도 T 가 균일하게 잘 정의된다면 열역학적 관계 $dU = -PdV + TdS \Rightarrow dS = 0$ 즉 엔트로피 $S = sV$가 보존되고 엔트로피 밀도 s 는 $s \propto 1/a^3$ 으로 우주가 팽창하면서 줄어든다.

프리드만 방정식 (Friedmann equations)

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d(\rho V)}{dt} = -P\frac{dV}{dt} \quad \left(H = \frac{\dot{a}}{a}, V = a^3\right)$$

3. 팽창하는 우주에서의 입자의 운동 방정식(geodesic equation)과 함께 물질에 종류에 따른 밀도의 진화과정을 이해할 수 있다. 좀 더 단순하게는 four-모멘텀 $p_\mu = m g_{\mu\nu} dx^\nu/ds$ 에 대해 $\vec{p}_i$ 는 comoving momentum으로 주어진다. i.e. $d\vec{p}_i/dt = 0$ (e.g. $e^{-ip_\mu x^\mu}$ 등을 생각해보면)

$$m^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \Rightarrow \; p_0^2 - \left(\frac{\vec{p}_i}{a}\right)^2 = m^2 \;\Rightarrow\; E = p_0, p = \frac{|\vec{p}_i|}{a} \propto \frac{1}{a} \quad \text{(Redshift)}$$

즉 입자의 물리적 운동량은 우주가 팽창함에 따라 $1/a$ 로 줄어든다. 또한 입자의 전체 수가 보존된다면 $N = na^3 =$ 일정 $\Rightarrow n \propto 1/a^3$ 으로 줄어들게 됨을 의미한다. 따라서

프리드만 방정식 (Friedmann equations)

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d(\rho V)}{dt} = -P\frac{dV}{dt} \quad \left(H = \frac{\dot{a}}{a}, V = a^3\right)$$

3. 팽창하는 우주에서의 입자의 운동 방정식(geodesic equation)과 함께 물질에 종류에 따른 밀도의 진화과정을 이해할 수 있다. 좀 더 단순하게는 four-모멘텀 $p_\mu = mg_{\mu\nu}dx^\nu/ds$ 에 대해 $\vec{p}_i$ 는 comoving momentum으로 주어진다. i.e. $d\vec{p}_i/dt = 0$ (e.g. $e^{-ip_\mu x^\mu}$ 등을 생각해보면)

$$m^2 = g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu \Rightarrow\; p_0^2 - \left(\frac{\vec{p}_i}{a}\right)^2 = m^2 \;\Rightarrow\; E = p_0, p = \frac{|\vec{p}_i|}{a} \propto \frac{1}{a} \quad \text{(Redshift)}$$

즉 입자의 물리적 운동량은 우주가 팽창함에 따라 $1/a$ 로 줄어든다. 또한 입자의 전체 수가 보존된다면 $N = na^3 =$ 일정 $\Rightarrow\; n \propto 1/a^3$ 으로 줄어들게 됨을 의미한다. 따라서

Radiation : $P = \frac{1}{3}\rho,\; \rho = \langle p \rangle n \propto \frac{1}{a}\frac{1}{a^3} \propto \frac{1}{a^4},\quad \dot{\rho} + 3H(\rho + P) = \dot{\rho} + 4H\rho = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\rho a^4) = 0 \Rightarrow \rho \propto \frac{1}{a^4}$

Matter : $P = 0, \rho = mn \propto \frac{1}{a^3},\quad \dot{\rho} + 3H(\rho + P) = \dot{\rho} + 3H\rho = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0 \Rightarrow \rho \propto \frac{1}{a^3}$

프리드만 방정식 (Friedmann equations)

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d(\rho V)}{dt} = -P\frac{dV}{dt} \qquad \left(H = \frac{\dot{a}}{a}, V = a^3\right)$$

4. 입자로 기술하기 어려운, 공간적으로 균일하게 값이 주어진 스칼라 장 $\phi(t)$의 운동의 경우 운동 방정식은 다음과 같다

Hubble friction term

$$\ddot{\phi}(t) + 3H\dot{\phi}(t) + \partial_\phi V(\phi) = 0$$

즉 우주의 팽창은 스칼라장에게 유효한 마찰력을 제공하여 움직임을 더디게 해준다. 양변에 $\dot{\phi}$를 곱하면

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right) + 3H\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\rho + 3H(\rho + P) = 0$$

$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ 인 경우에는 $(P = -\rho)$, . $\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = \dot{\rho} = 0$, $\rho =$ 팽창과 무관하게 일정, 우주 상수와 유사한 결과를 준다.

균일하고 등방적인 우주의 팽창

우주의 밀도가 특정 물질에 의해 지배되는 경우 $P = w\rho$ $(w =$ 일정$)$, 그리고 평평한 우주를 가정할 때 프리드만 방정식은

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}, \qquad \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -(1+3w)\frac{4\pi G\rho}{3}$$

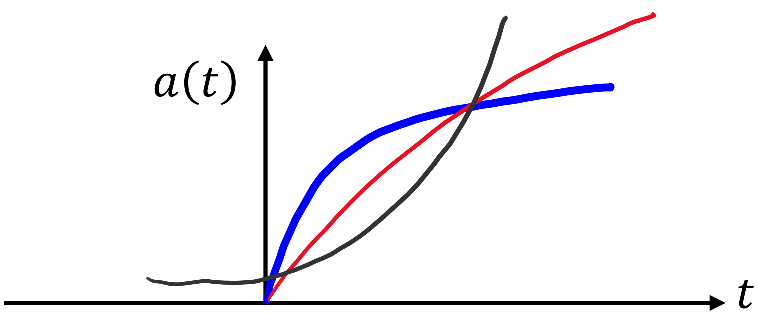
다음과 같은 해를 가진다. $a(t) = (t/t_0)^{\frac{2}{3(w+1)}}$ $(w \neq -1)$, $\quad = e^{H_0(t-t_0)}$ $(w = -1)$

Radiation domination: $a(t) = \sqrt{t/t_0}$, $H(t) = \frac{1}{2t} = \frac{H_0}{a^2}$, $\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^4}$

Matter domination: $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$, $H(t) = \frac{2}{3t} = \frac{H_0}{a^{3/2}}$, $\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3}$

$t = 0 \Rightarrow$ 특이점 $\rho = \infty$

Cosmological Constant (de Sitter, Positive vacuum energy): $H(t) = H_0$, $\rho(t) = \rho_0$

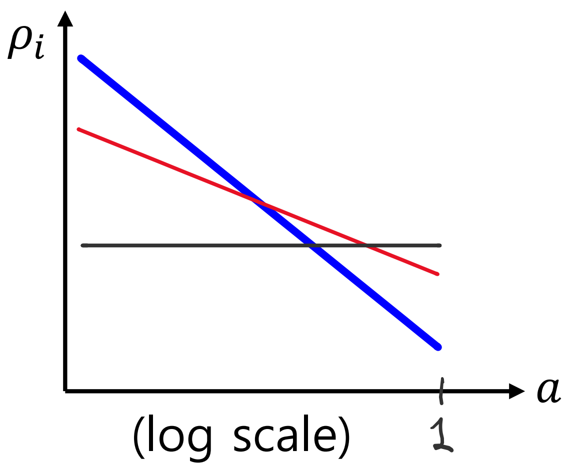


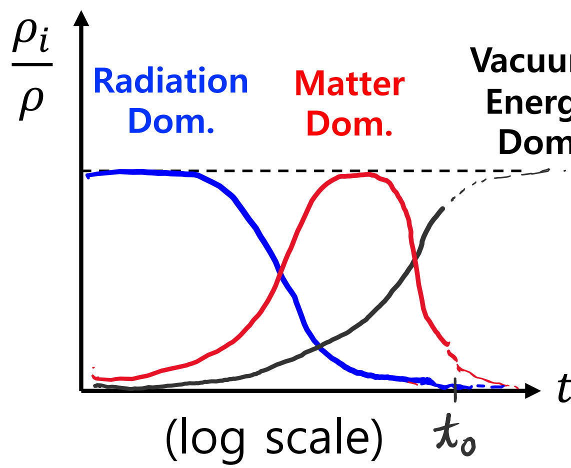
여러 성분을 가진 균일하고 등방적인 우주의 팽창

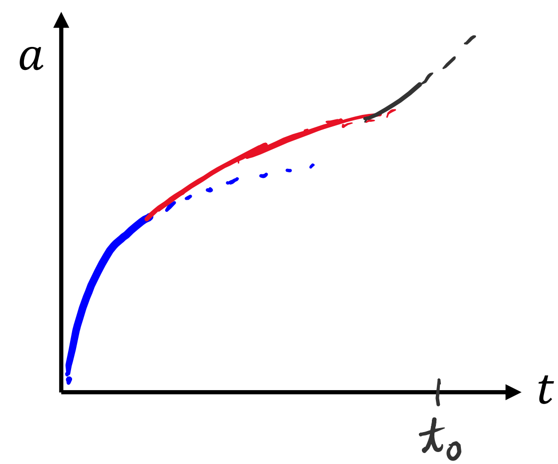
우주를 이루는 성분은 한가지 종류만 있지 않다. 앞에서 언급한 모든 종류가 존재한다면

$$\rho(t) = \rho_{rad}(t) + \rho_{mat}(t) + \rho_{vac}(t) = \frac{\rho_{rad}(t_0)}{a^4} + \frac{\rho_{mat}(t_0)}{a^3} + \rho_{vac}(t_0) = \rho_0\left(\frac{\Omega_{rad}}{a^4} + \frac{\Omega_{mat}}{a^3} + \Omega_{vac}\right)$$

where $\Omega_i = \rho_i(t_0)/\rho(t_0)$ 이고 우주가 팽창함에 따라 시기적으로 우주를 지배하는 물질의 종류가 달라지고 우주의 팽창 정도에 아래와 같이 영향을 끼친다.

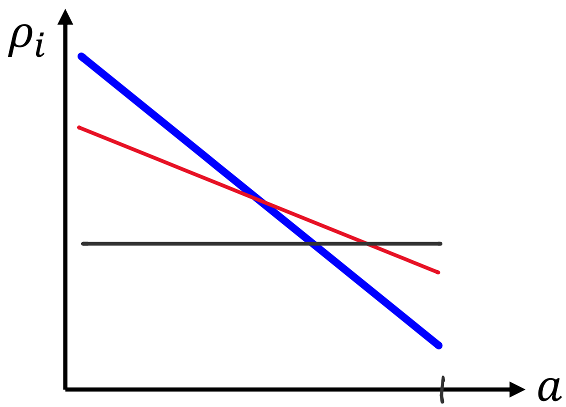




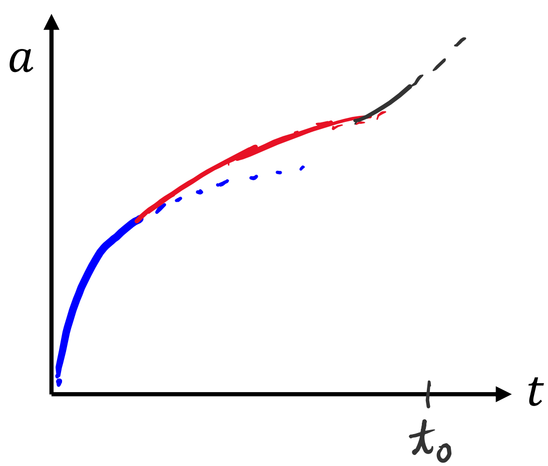


우주 팽창의 역사

우주의 전체 평균 에너지와 팽창의 진화를
균일하고 등방적인 우주 내에서의 적절한
물질의 구성 성분으로 쉽게 이해할 수 있다.



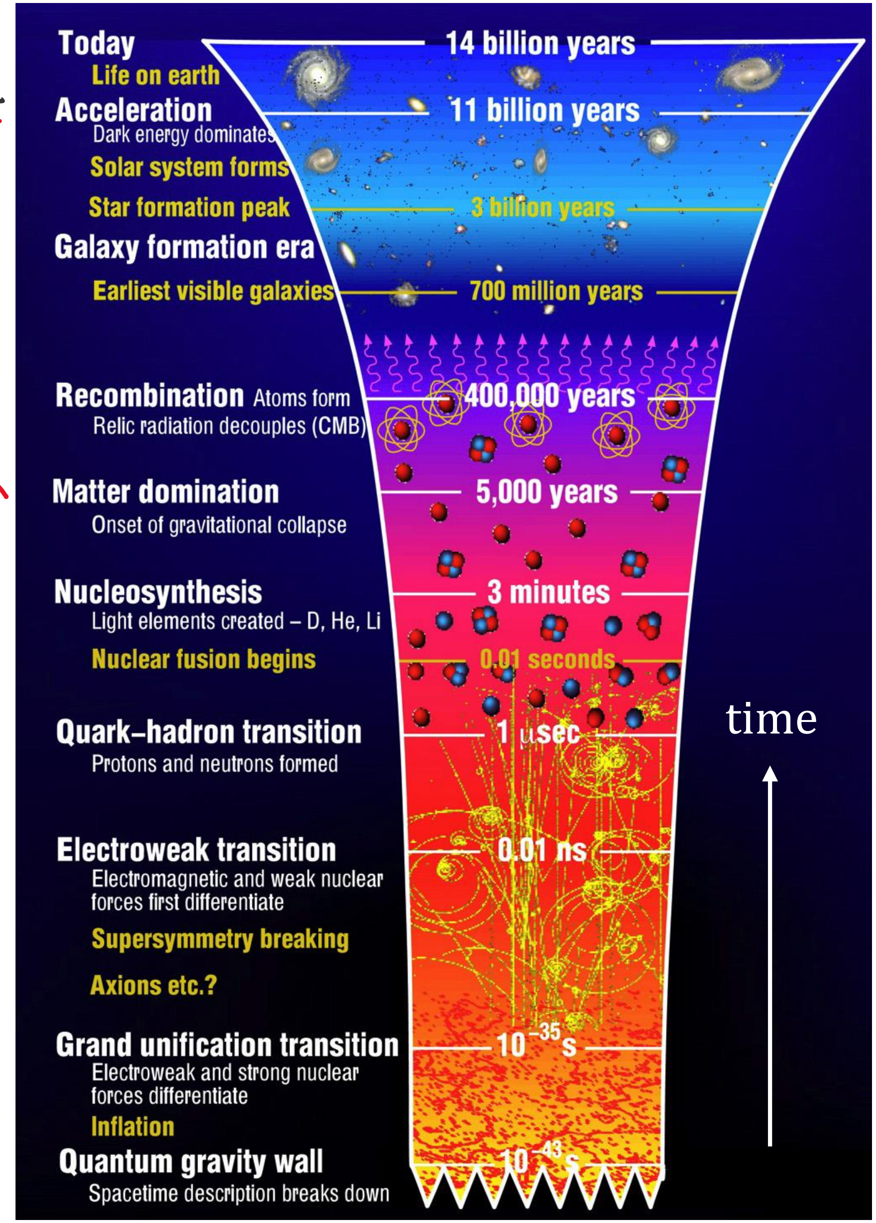
(log scale)



Vacuum Energy Dom.

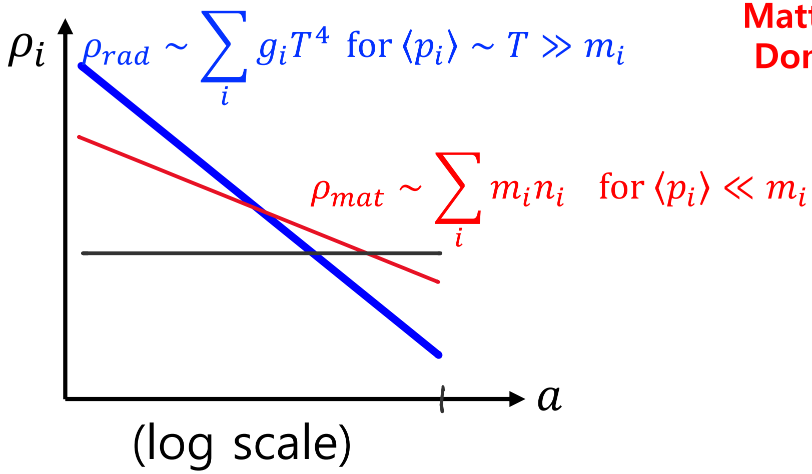
Matter Dom.

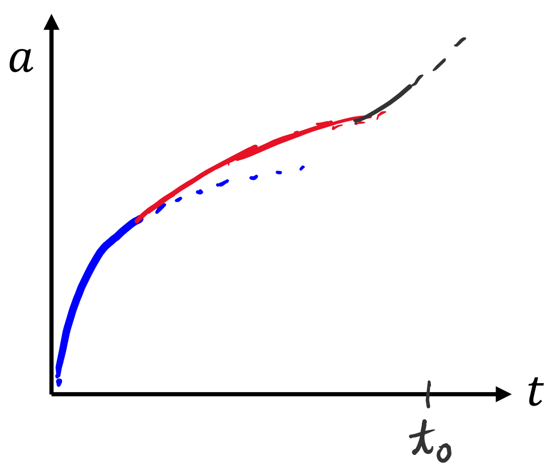
Radiation Dom.

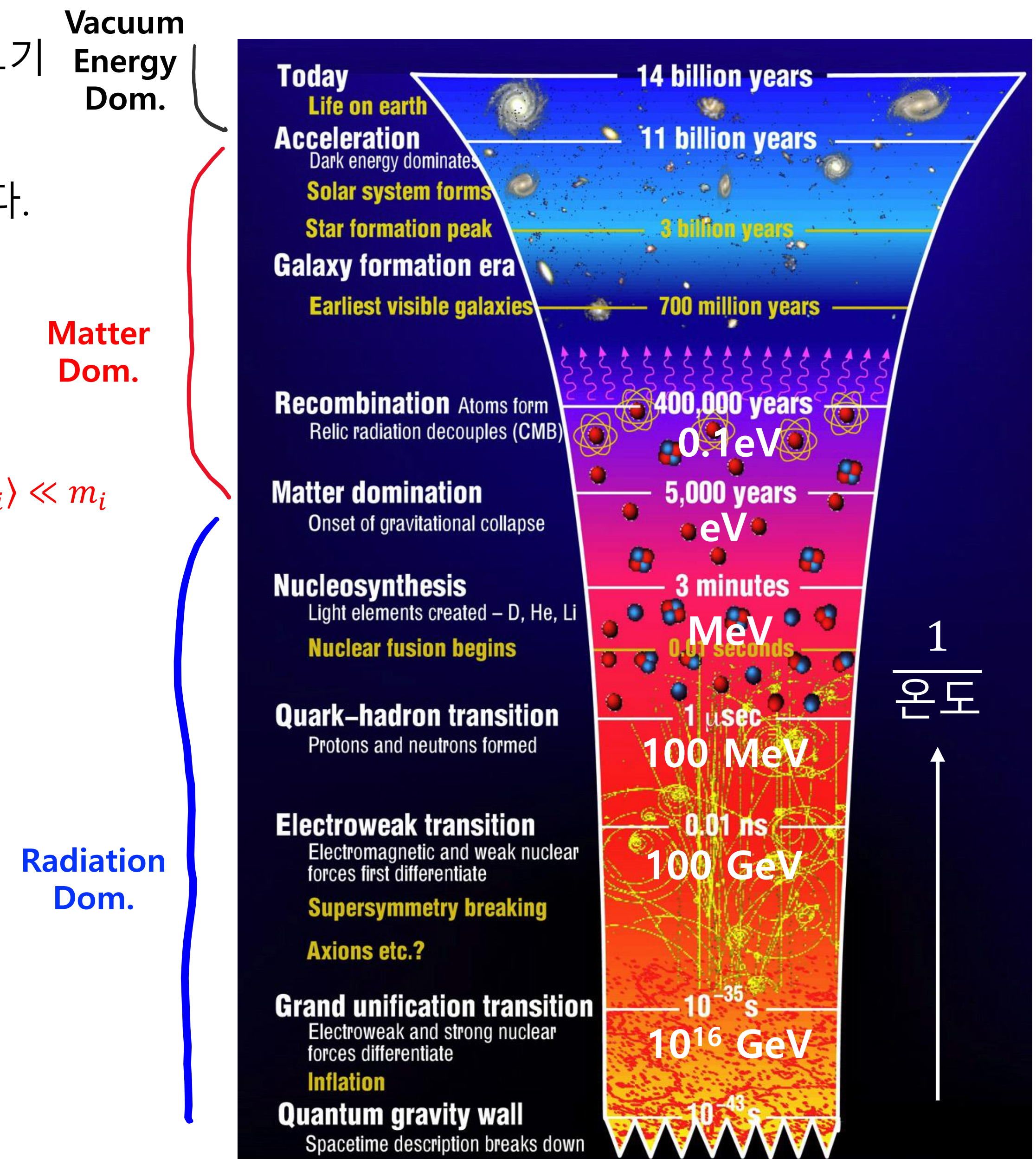


우주의 성분의 진화

우주가 팽창하면서 각 입자 운동량의 크기가 줄어들면서 $\langle p \rangle \propto 1/a$ 적당한 시점에 radiation 에서 matter 로 전환될 수 있다.





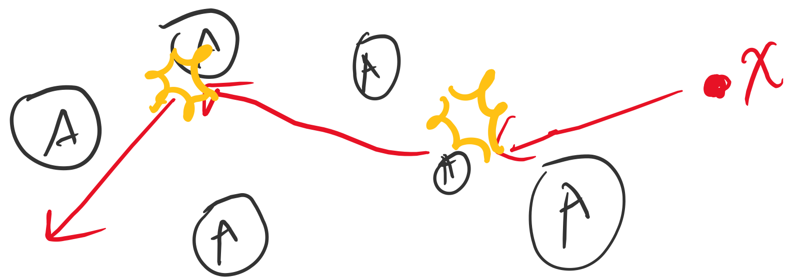


우주의 열적 진화

Q. 초기 우주에서는 물질은 지속적으로 생성과 소멸을 반복하면서 열적 평형 상태에 있을 수 있다. 열적 평형상태에 있을 조건은 무엇인가?

우주의 열적 진화

Q. 초기 우주에서는 물질은 지속적으로 생성과 소멸을 반복하면서 열적 평형 상태에 있을 수 있다. 열적 평형상태에 있을 조건은 무엇인가?



A1. 당시의 우주 나이 t 동안 평형상태로 이끄는 상호작용이 충분히 많이 일어나야 한다. 즉 단위 시간당 해당 산란이 일어날 확률 $\Gamma(t) = \langle \sigma v \rangle n_A$ 대해

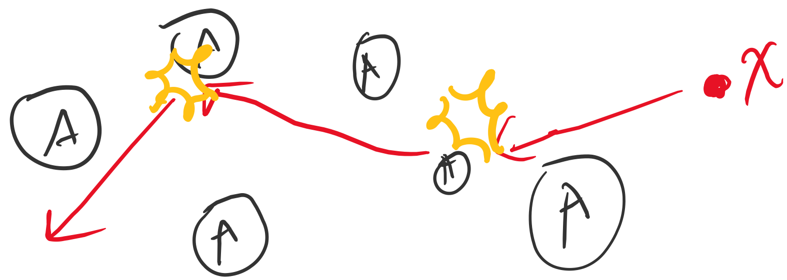
$$\Gamma(t)\, t \gg 1 \Rightarrow \quad \Gamma(t) \gg H(t) \quad \text{for } \; t \sim H(t)^{-1}$$

A2. 우주의 팽창 속도 $H(t)$ 가 산란이 일어나는 속도 $\Gamma(t)$ 보다 빠르면 입자는 상호작용할 입자를 찾지 못해 열평형에 이르지 못할 것이다. 따라서 $\Gamma(t) \gg H(t)$ 가 되어야 한다.

일반적으로 과거로 갈수록 산란을 하는 입자의 밀도 n_A 가 매우 커지므로 $\Gamma(t) \gg H(t)$ 의 조건이 만족되기 쉽다.

우주의 열적 진화

Q. 초기 우주에서는 물질은 지속적으로 생성과 소멸을 반복하면서 열적 평형 상태에 있을 수 있다. 열적 평형상태에 있을 조건은 무엇인가?



A1. 당시의 우주 나이 t 동안 평형상태로 이끄는 상호작용이 충분히 많이 일어나야 한다. 즉 단위 시간당 해당 산란이 일어날 확률 $\Gamma(t) = \langle \sigma v \rangle n_A$ 대해

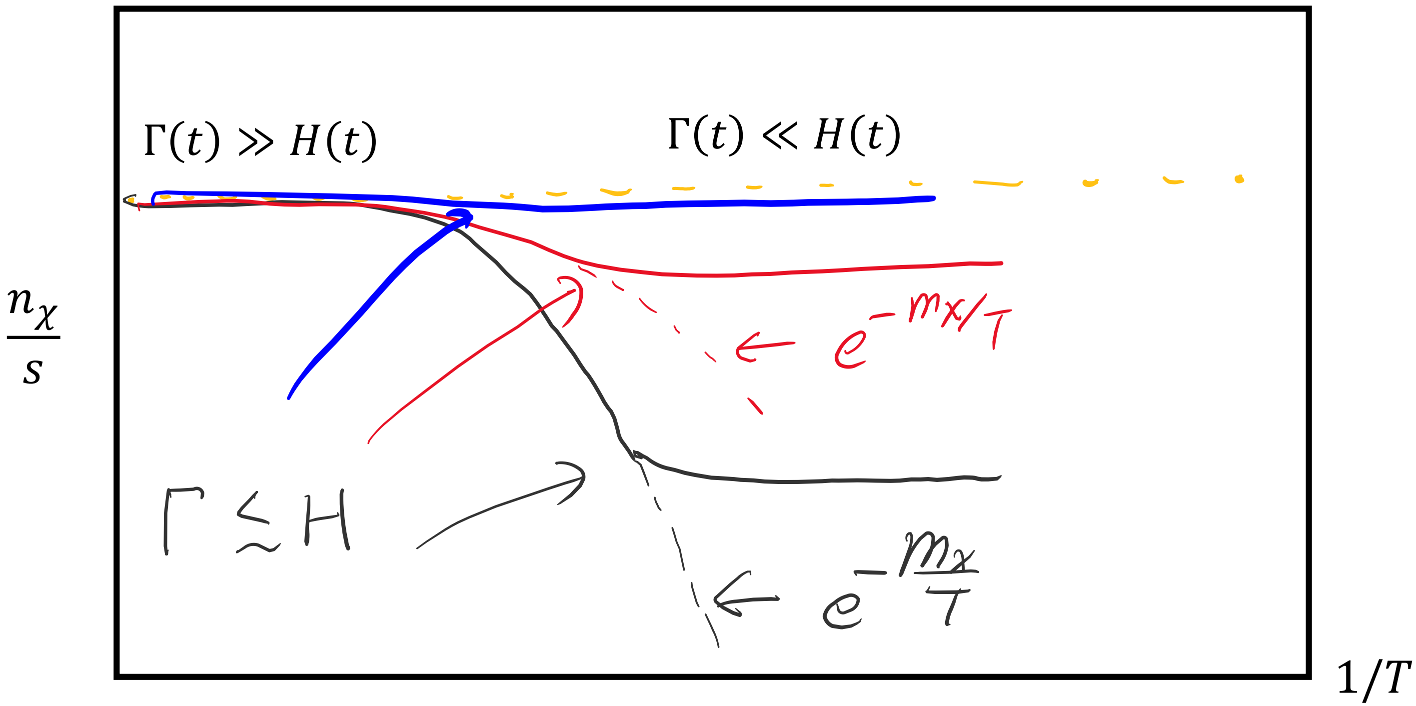
$$\Gamma(t)\, t \gg 1 \Rightarrow \quad \Gamma(t) \gg H(t) \quad \text{for} \;\; t \sim H(t)^{-1}$$

A2. 우주의 팽창 속도 $H(t)$ 가 산란이 일어나는 속도 $\Gamma(t)$ 보다 빠르면 입자는 상호작용할 입자를 찾지 못해 열평형에 이르지 못할 것이다. 따라서 $\Gamma(t) \gg H(t)$ 가 되어야 한다.

일반적으로 과거로 갈수록 산란을 하는 입자의 밀도 n_A 가 매우 커지므로 $\Gamma(t) \gg H(t)$ 의 조건이 만족되기 쉽다. 반대로 우주가 팽창하면서 $\Gamma(t) < H(t)$ 가 되기 시작하면 해당 입자는 우주적 thermal bath 에서 빠져 나오게 된다.

우주의 열적 진화

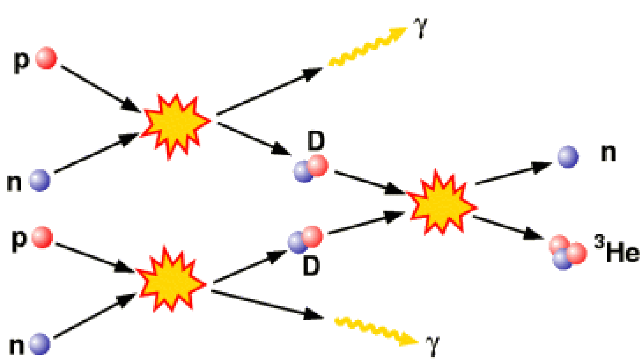
열적 평형상태에서 벗어난 입자 χ 는 그 수가 보존되면서 현재 우주의 relic 으로 남아서 에너지에 기여하게 된다.

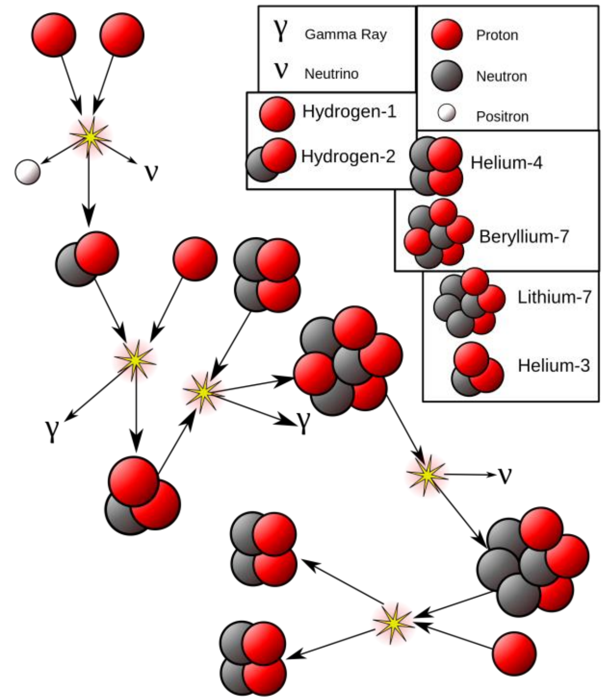


Big Bang Nucleosynthesis (BBN)

우주의 온도가 100MeV 이하로 떨어지면서 쿼크와 글루온은 핵자에 갇히고 양성자와 중성자 (바리온 Baryon 으로 통칭)가 된다. **또한 그 과정에서 반양성자와 반중성자도 생성이 되는데, 대부분의 바리온과 그 반입자는 쌍소멸을 통해 사라지고 더 이상 쌍소멸을 할 수 없는 바리온들은 그 수를 보존한다. 즉 $n_B \propto 1/a^3$**

주어진 바리온의 양에 대해 우주가 식어가면서 자유 양성자와 자유 중성자는 좀 더 안정적인 가벼운 핵자들로 속박되는 과정을 겪게 되고 이 과정을 빅뱅 핵합성이라 하며 정확하게 계산 가능하다.





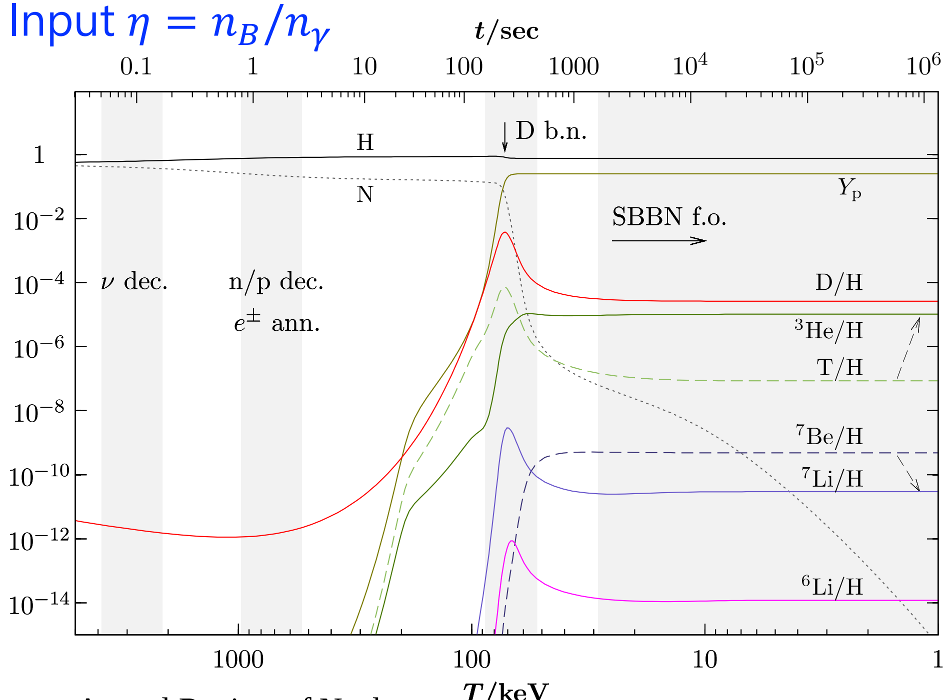
Big Bang Nucleosynthesis (BBN)

Light nuclei () in the Universe were made between 1 sec and 10^3sec.

$E_{\text{bind}}(D) = 2.2\ \text{MeV}$

$$\begin{aligned} \mathrm{p} + \mathrm{n} &\longrightarrow {}^2\mathrm{H} + \gamma \\ \mathrm{p} + {}^2\mathrm{H} &\longrightarrow {}^3\mathrm{He} + \gamma \\ {}^2\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} &\longrightarrow {}^3\mathrm{He} + \mathrm{n} \\ {}^2\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} &\longrightarrow {}^3\mathrm{H} + \mathrm{p} \\ {}^3\mathrm{He} + {}^2\mathrm{H} &\longrightarrow {}^4\mathrm{He} + \mathrm{p} \\ {}^3\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} &\longrightarrow {}^4\mathrm{He} + \mathrm{n} \end{aligned}$$

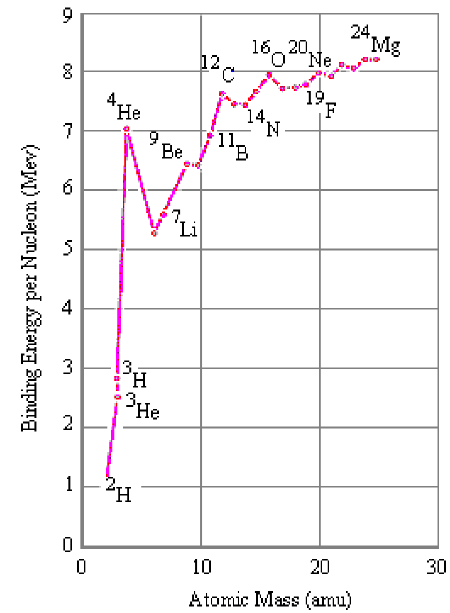
Input $\eta = n_B/n_\gamma$



$Y_p \equiv \rho(^4\text{He})/\rho_B$

Annual Review of Nuclear and Particle Science, 60:539-568, 2010

더 안정적



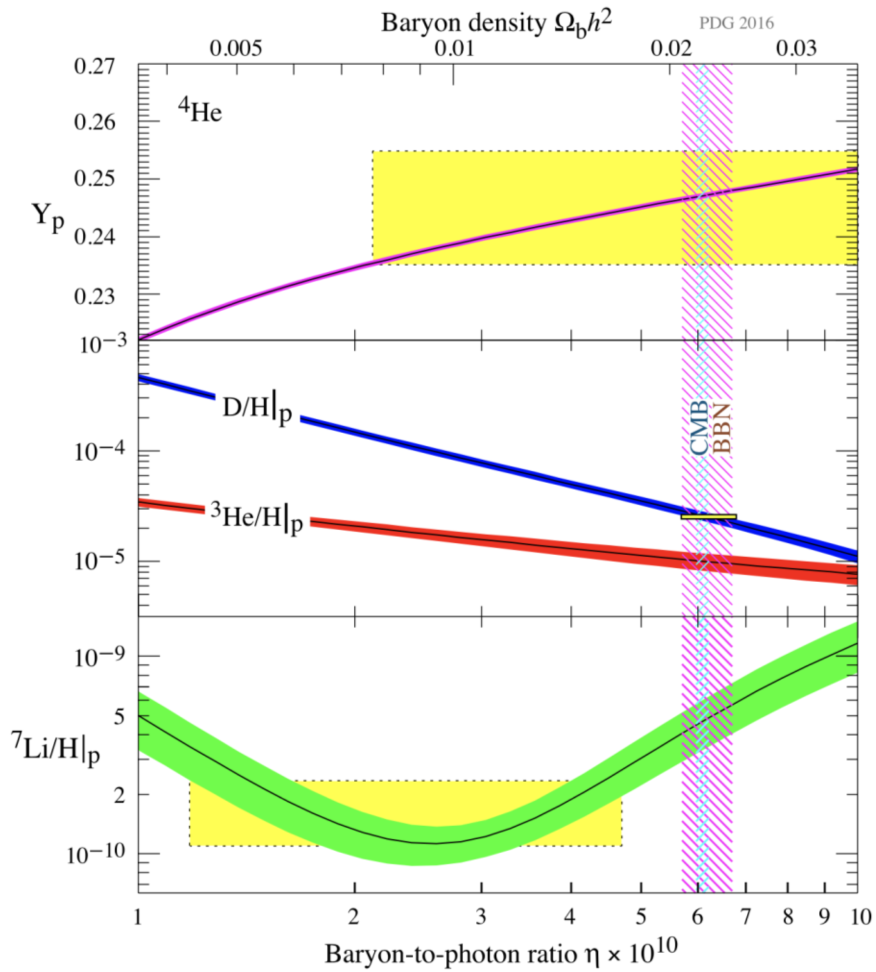
Big Bang Nucleosynthesis (BBN)

바리온의 포톤에 대한 상대적인 양 (n_B/n_γ) 을 바꿔가면서 계산할 수 있다. 특히 중수소(Deuterium)의 양이 이에 민감하게 반응하는데, **실제 관측값과 이론값을 비교함으로써 input 값으로의 우주의 바리온의 양을 결정할 수 있다.** 우리가 아는 모든 별, 은하, 행성 등은 바리온으로 이뤄져 있으므로 우주에서의 그 전체 양 또한 예측할 수 있다.

The larger the nucleon density, the higher the temperature at which nucleosynthesis began, and so the less time there was for neutron decay before nucleosynthesis, leading to a higher final ^{4}He abundance.

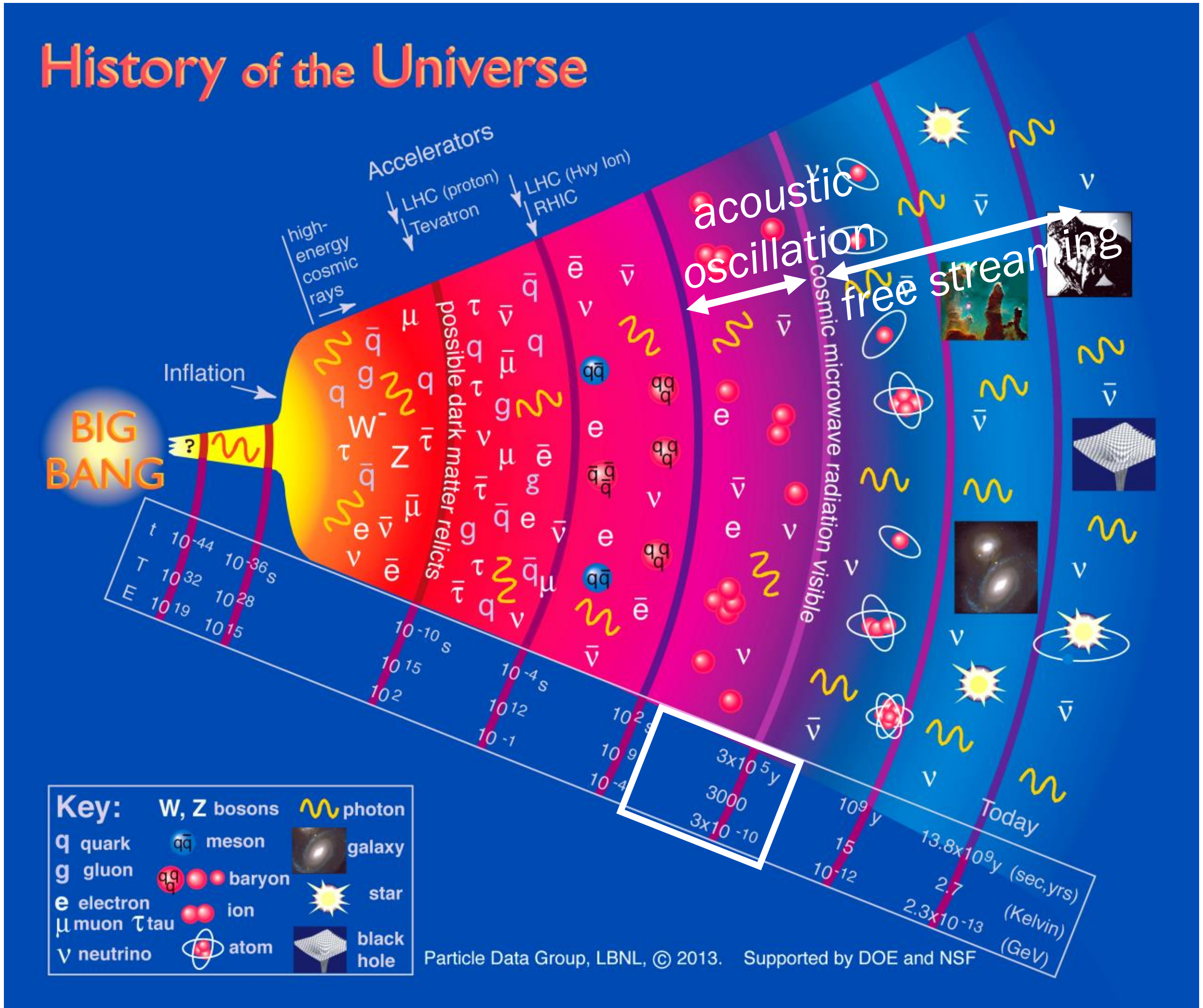
The higher the baryon density, the more complete will be the incorporation of neutrons into ^{4}He, and hence the smaller the resulting abundance of deuterium.

[Weinberg , Cosmology]



Cosmic Microwave Background (CMB)

온도가 0.1 eV 정도로 내려가기 전에는 이온 상태의 바리온은 포톤과 강하게 상호작용을 하다가 온도가 떨어지면서 전자와 결합을 해 원자가 되고 decouple 된 photon 은 자유롭게 진행하여 우리에게 도달한다.



Cosmic Microwave Background (CMB)

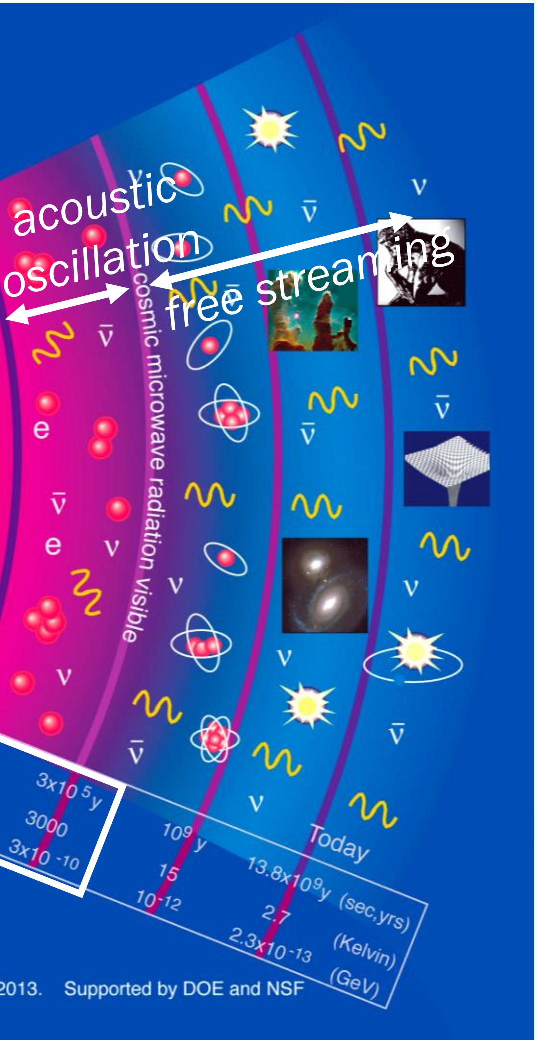
온도가 0.1 eV 정도로 내려가기 전에는 이온 상태의 바리온은 포톤과 강하게 상호작용을 하다가 온도가 떨어지면서 전자와 결합을 해 원자가 되고 decouple 된 photon 은 자유롭게 진행하여 우리에게 도달한다.

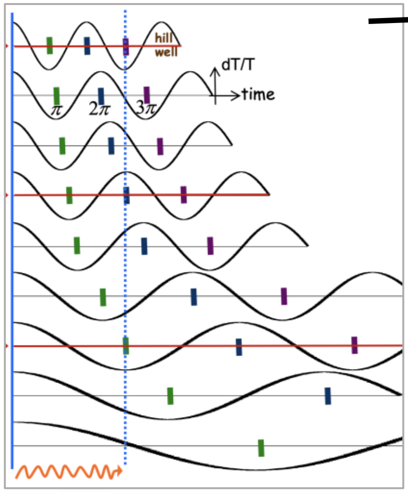
$$\ddot{\delta_k} + c_s^2 k^2 \delta_k + k^2 \phi_k \simeq 0$$

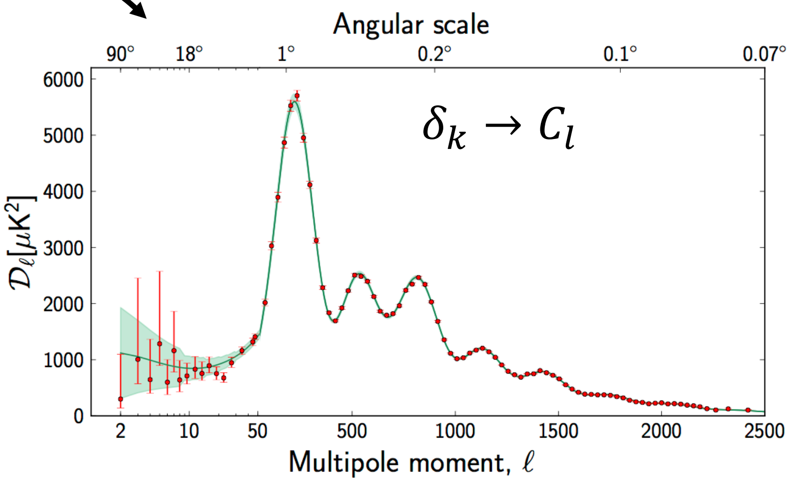
gravitational potential from Dark Matter

$$\delta_k = \left(\frac{\delta\rho_\gamma}{\bar{\rho}_\gamma}\right)_k$$

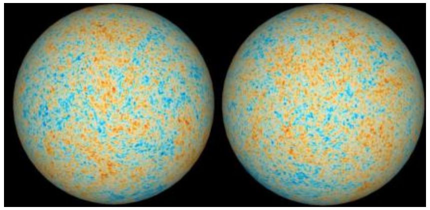
$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3(1 + 3\rho_B/4\rho_\gamma)}}$$







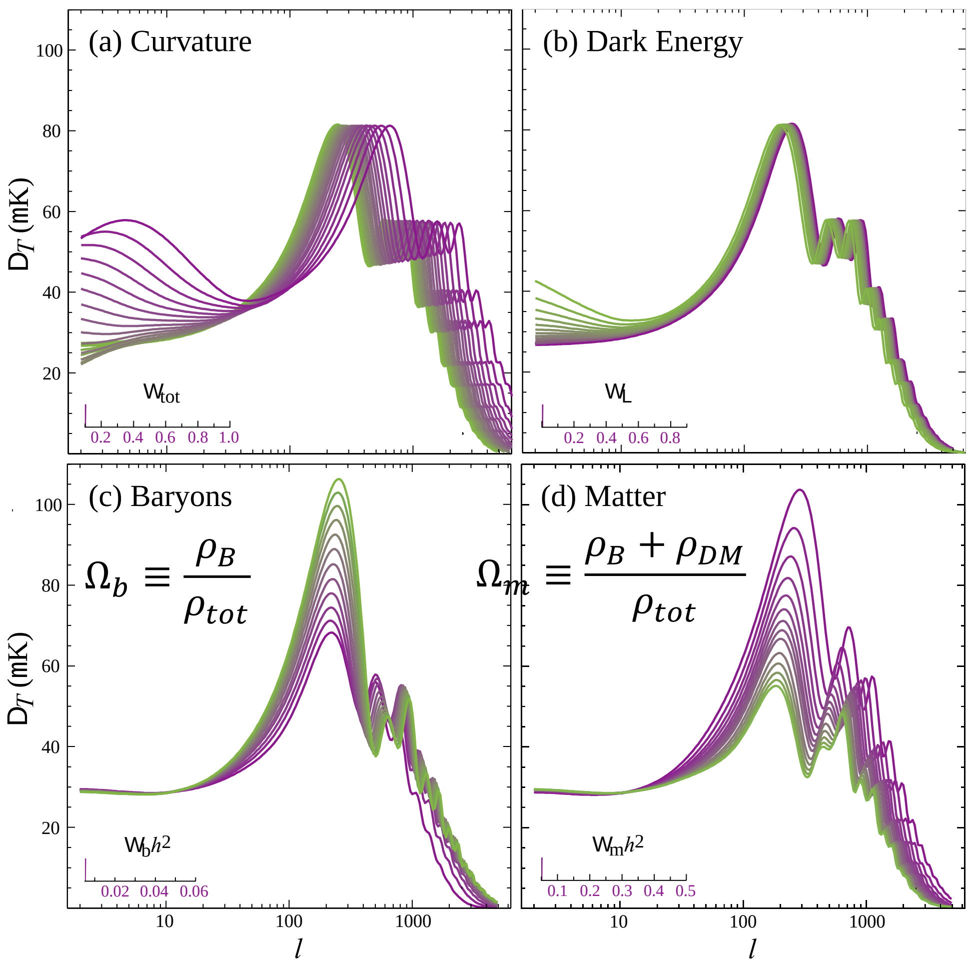
PLANCK Satellite



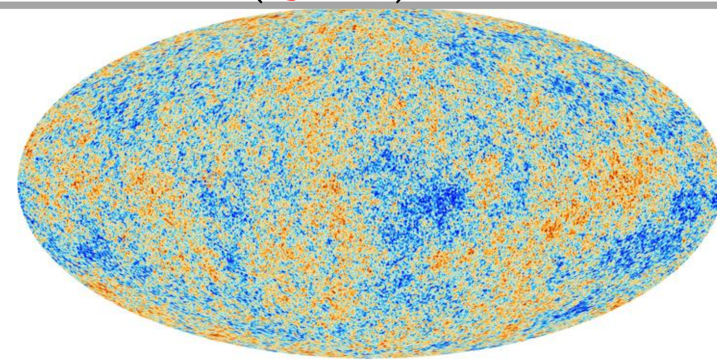
Cosmic Microwave Background (CMB)

바리온과 함께 암흑물질의 양은 CMB 의 Angular Power spectrum 을 fitting 하는데 필수적이다. BBN의 결과와 함께 가장 잘 fitting을 하는 값은 암흑물질의 양이 바리온의 양보다 많아야 함을 의미한다.

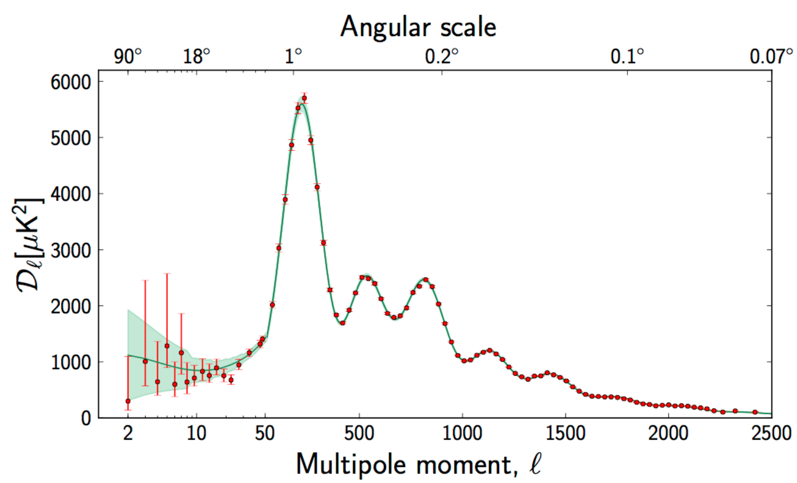
$$\delta_k(t_{dec}) = \phi_k\left(\frac{1}{c_s^2} - 2\right)\cos(c_s k t_{dec}) - \frac{\phi_k}{c_s^2}$$



Hu, Dodelson, Ann.Rev.Astron.Astrophys.40:171-216,2002



PLANCK 2013



Big Questions

우주론에 대한 연구는 입자물리학자들에게 매우 중요한 질문들을 던진다.

1) 입자와 반입자의 비대칭성은 우주 구조 형성에 필수적이다. 하지만 표준모형 만으로는 관측값을 도저히 설명할 수 없다. 과연 이 비대칭성은 어디서 오는 것일까?

2) 암흑물질의 정체는 무엇인가?

3) 암흑에너지(진공에너지)의 값은 이론적으로 예측 가능한 값인가? 그리고 그 값은 자연스러운가?

4) 등방적이고 균일한 CMB 와 Large Scale Structure 의 관측 결과는 우주의 density fluctuation 이 Inflation(원시 급 가속팽창)의 결과라는 강력한 증거를 제공한다. 이는 앞에서 살펴본 Particle Horizon이 급가속팽창에 의해 매우 커져서 아주 넓은 영역이 인과적으로 연결될 수 있음을 의미하기 때문이다. 그럼 Inflation을 일으키는 입자 모형은 무엇인가?

5) 그 외 위의 질문들로 부터 더 깊게 연결될 수 있는 다양한 질문들.

이러한 질문들을 탐구하면서 새로운 관측 결과를 예측함으로써 아주 작은 세계의 상호작용을 결정하는 기본법칙이 어떻게 아주 거대한 크기의 물리에 영향을 줄 수 있는지를 이해할 수 있다.