속박 상태와 Regge 자취

KIAS-SNU 겨울학교 2023, Lessons from Scattering 그룹 프로젝트 과제

퍼텐샬이 방사(radial)대칭을 가질 때, 파동함수를 분리할 수 있으며 반지름 방향의 슈뢰딩거 방정식은

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - 2mV(r) + p^2\right)\phi(r) = 0. \tag{1}$$

이 된다. 이의 일반해는 구면 Hankel 함수 $h_l^{\pm}(pr)$로 전개할 수 있다. r이 매우 클 때 이들은

$$h_l^{\pm}(pr) \to \frac{e^{\pm i(pr - l\pi/2)}}{ipr} \tag{2}$$

로 근사된다.

(1) 이 해 (2)를 보면 운동량의 크기 p를 복소수로 확장할 수도 있다. 만약 $p = i\alpha, \alpha > 0$이면, h_l^+은 규격화 가능한 파동함수가 됨을 보이시오. 이 해를 속박(bounded) 상태라 볼 수 있다. 이때 에너지 $E = p^2/(2m)$은 음수가 된다.

(2) 산란 진폭

$$f(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)f_l(p)P_l(\cos\theta) \tag{3}$$

을 전개한 것을 부분파 진폭(partial wave amplitude)이라고 한다

$$f_l(p) = \frac{s_l(p) - 1}{2ip} = \frac{e^{2i\delta_l(p)} - 1}{p}. \tag{4}$$

여기서, $\langle E', l', m|S|E, l, m\rangle = \delta(E' - E)\delta_{l'l}\delta_{m'm}s_l(p)$이다. 이때 $s_l(p)$과 $f_l(p)$이 극(pole)을 가짐을 보이시오. 극은 복소함수의 역수 가 0인 점이다.

이제 p대신 $E = p^2/(2m)$를 사용하자. 위와 반대로, S행렬의 극의 위치는 속박 상태의 에너지를 나타내며, 상대론적인 산란 이론에서는 속박된 입자, 또는 기본입자의 질량-에너지를 나타낸다.

거꾸로, $f_l(E)$를, E가 주어졌을 때, l에 대한 함수로 생각할 수 있다. 기저함수 (2)를 다시 보면 l이 복소수여도 상관이 없다. 가령, 정해진 에너지 E에 대하여 $f_l(E)$가 극

(pole)를 갖는 각운동량 l들을 찾아볼 수도 있다. 이 극들의 위치 $l = \alpha(E)$를 레제 자취(Regge trajectory)라고 한다.

(3) 방정식 (1)에서, $E < 0$일때 $f_l(E)$이 극을 가질 조건은 l이 실수여야 한다는 것을 보이시오.

(4) 방정식 (1)를 E에 대하여 미분한 식과, (1)에 $\partial\phi/\partial E$를 곱한 것을 뺀 뒤 이를 적분하여,

$$\frac{dl}{dE} > 0 \tag{5}$$

임을 보이시오. 즉 에너지를 올리면 이를 만족하는 각운동량 값도 올라간다.

$E < 0$를 유지하는 속박상태이면 $l = \alpha(E)$은 계속해서 실수일 것이다. $E > 0$이 되기 시작하면서 l은 실수가 아닌 복소수가 된다.

(5) $f_l(E)$와 퍼텐샬의 관계를 보이시오. 퍼텐샬을 적당히 잡고 따라 레제 자취가 어떻게 되는지 자유롭게 생각해보시오.

자연에 관찰되는 강입자들 가운데 질량 제곱과 l이 비례하는 것들이 있다.

$$l = \alpha(E = m^2) = \alpha' m^2 + \alpha(0) \tag{6}$$

질량을 상대론적인 에너지라고 생각하면 이들은 입자들의 속박 상태이다. 이 그림은

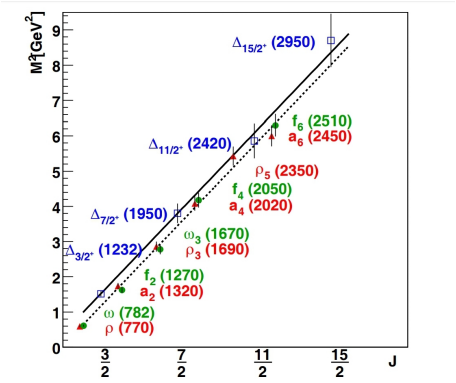

Fig. 1. The leading Regge trajectory: Δ resonances with maximal J in a given mass range. Also shown is the Regge trajectory for mesons with $J = L + S$.

강입자들에 대한 레제 자취이다[Klempt, Metsch 12]. 이를 QCD(또는 적당한 퍼텐셜)로 설명하는 것은 아직까지 풀리지 않은 문제이다.

이 속박 상태가 강입자가 아닌 기본 양자 마당(quantum field)이라고 생각하면 어떨까? 잘 만들면 스핀 2인 기본입자(중력자!)가 질량이 0이 될 수 있다.

참고문헌: John. R. Taylor, Scattering Theory, Chs. 11 and 12; J. J. Sakurai, Modern Quantum Mechanics; Ch. 6. Green, Schwarz, Witten, Ch. 1.