제16회
고등과학원
기하학 겨울학교

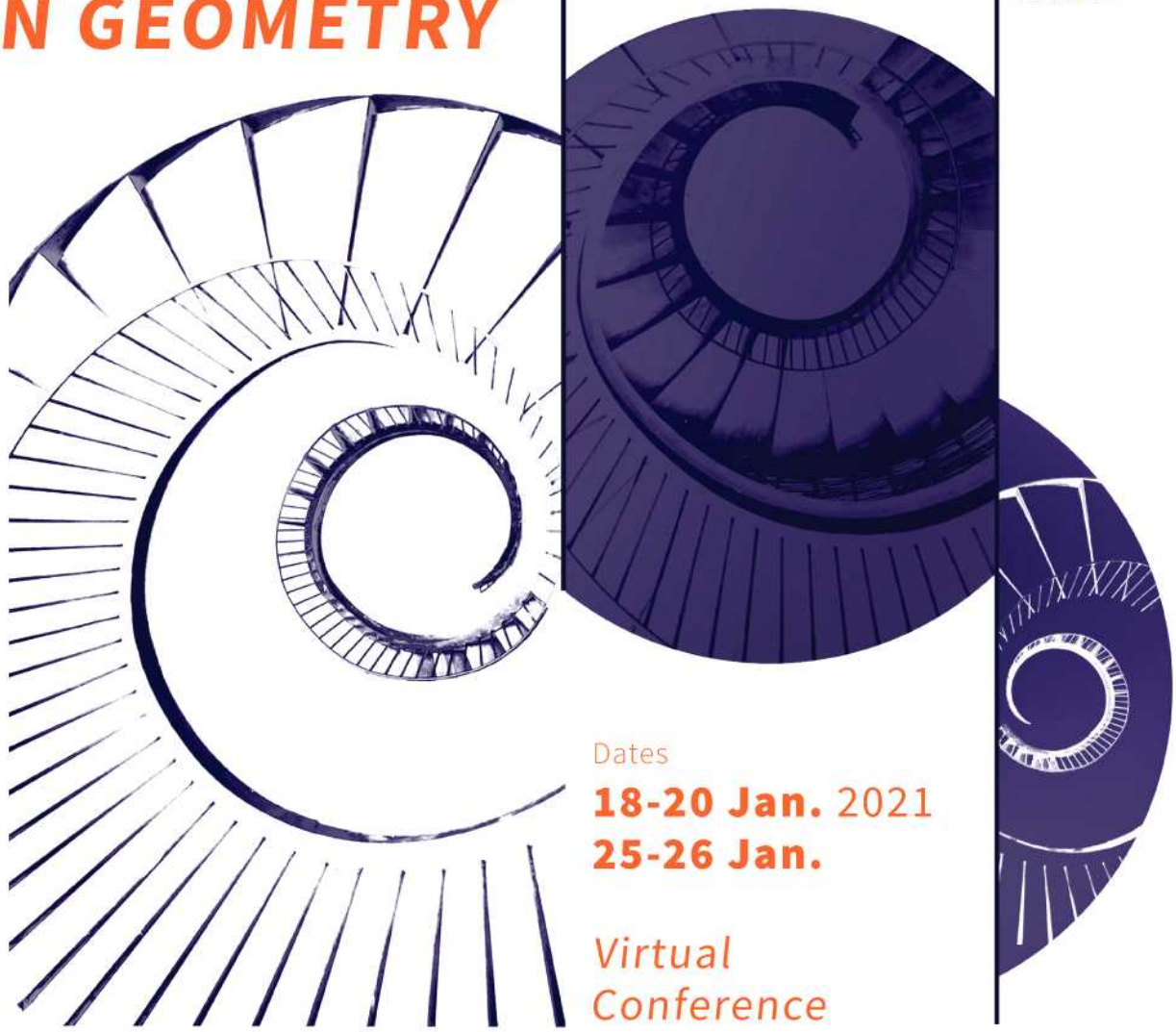
2021.
1. 18-20, 25-26

비대면 화상회의

KIAS KOREA INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY

THE 16TH KIAS WINTER SCHOOL ON GEOMETRY

Supported by
건국대학교 수리과학연구소
이화여자대학교 BK
부산대학교 BK



Dates

18-20 Jan. 2021
25-26 Jan.

Virtual Conference

events.kias.re.kr/h/WSG21

Organizers

고성은 건국대학교
이재혁 이화여자대학교
최경수 고등과학원
최인송 건국대학교
표준철 부산대학교

Invited Speakers

김영욱 고려대학교
김현규 이화여자대학교
김홍종 GIST, 서울대학교
박지원 Caltech
연응범 서울대학교
유성민 IBS-CGP
이재훈 서울대학교
이태훈 고등과학원
최경수 고등과학원
최범준 University of Toronto
최인송 건국대학교

제 17 회 겨울학교

1. 차 례

입문강연- 최인송, 김현규
집중강연- 최경수
주제강연- 최범준, 박지원, 유성민
새싹강연- 이태훈, 연응범, 이재훈
기념강연- 김홍종, 김영욱

2. 시간표

	1월 18일 (월)	1월 19일 (화)	1월 20일 (수)	1월 25일 (월)	1월 26일 (화)
15:30 –16:20	최인송	박지원	박지원	김홍종	이재훈
16:40 –17:30	최범준	최범준	이태훈	유성민	유성민
저녁식사					
19:30 –20:20	최경수	최경수	최경수	최경수	최경수
20:35 –21:25	최인송	김현규	연응범	김현규	김영욱

기념강연	집중강연	주제강연	입문강연	새싹강연

강연 초록

최인송 (건국대학교)

- Title: Introduction to Riemann surfaces I, II
- Abstract: 리만면의 기본적인 개념과 성질에 대해서 소개하는 강의이다. 특히 미분기하 또는 복소해석으로부터 정의된 컴팩트 리만면이 대수적인 성격을 가지게 됨을 몇 가지 측면에서 관찰하고자 한다. 첫 시간에는 리만면의 구체적인 예를 살펴보면서 "사파리" 체험을 시도해보고자 한다. 두 번째 시간에는 컴팩트 리만면 위의 holomorphic/meromorphic functions/forms에 대해 살펴보면서, 함수론과 기하적 성질의 관련성을 알아본다.

김현규 (이화여자대학교)

• 19일(화)

- Title: Basics on Teichmüller spaces of Riemann surfaces
- Abstract: The Teichmüller space of a topological surface S can be viewed as the universal cover of Riemann's classical moduli space which parametrizes all possible Riemann surface structures on S. I will introduce several definitions of the Teichmüller space. I will present how the Poincaré-Koebe Uniformization theorem lets us go back and forth between the complex-structure definition and the hyperbolic-metric definition. A smooth manifold structure on the Teichmüller space will be discussed.

• 25일(월)

- Title: Teichmüller spaces as cluster varieties
- Abstract: I will review some versions of Teichmüller spaces of a non-compact surface S, and two special coordinate systems of them. Each of these coordinate systems require an additional choice of data, called the ideal triangulation of S. We will investigate the coordinate change formulas associated to changes of ideal triangulations. This will let us view the Teichmüller spaces as positive real points of certain cluster varieties.

최경수 (고등과학원)

- Title: 매듭이론과 확산방정식
- Abstract: 우리는 일상생활에서 운동화 끈과 같은 매듭을 자주 발견한다. 이 매듭의 끝을 이어서 닫힌 단일곡선을 만든다면, 수많은 닫힌곡선들이 둥근 원으로 돌아갈 수 없다. 우리는 그 곡선들은 꼬여있다고 한다. 이와 비슷하게 공간에 매몰되고 닫혀있는 단순-연결된 곡면들 중 연속적으로 변화하여 둥근 구가 될 수 없는 꼬인 곡면들이 존재한다. 그런데 위상수학개론에 의하면 닫혀있는 단순-연결된 곡면은 구와 위상 동형이다. 다시 말해, 매몰되어 있는 위상동형인 두 곡면이 동위체가 아닐 수 있다는 말이다. 이처럼 매몰되어 있는 초곡면이 구와 위상 동형일 때 둥근 구와 동위체인지 묻는 질문을 쇤플리스 문제라고 한다.
기하학적 해석학자들은 1980년대에 푸엥카레 추측을 해결하기 위해 리찌 흐름을 도입하면서,

쇤플리스 문제를 해결하기 위해 평균 곡률 흐름을 도입했다. 두 흐름 모두 확산방정식의 일종으로 방정식의 해인 다양체가 평형 상태가 되기 위해 움직인다. 일반적으로 이런 흐름들은 둥근 구나 둥근 원통과 같은 단순한 형태의 평형 상태로 진화하기 때문에, 다양체의 위상 변화를 관찰하는데 도움이 된다.
이 강연에서는 확산방정식의 기본적인 성질을 확인하고, 위상 변화와 방정식의 특이점의 관계를 관찰한다. 또한 특이점에서 흐름이 평형 상태로 수렴함을 보이고, 그 평형 상태들의 안정성에 대하여 논의한다.
첫째 주에는 미분방정식과 20세기의 주요 결과들에 대해 강연한다. 1강은 쇤플리스 문제와 미분방정식의 입문 강연이며, 2강에서는 평면 위의 볼록한 곡선의 흐름을 예제로 하여 미분방정식의 기초이론을 공부한다. 3강은 일반적인 세미나 형식으로 페렐만의 푸엥카레 추측의 증명에 관계된 내용들을 소개한다. 둘째 주의 4강은 변분법과 임계점의 안정성을 중심으로 하는 입문 강연이며, 5강은 최신 연구 동향에 대해 소개한다.

최범준 (University of Toronto)

- Title: Geometric inequalities and inverse mean curvature flow
- Abstract: The inverse mean curvature flow, or the curvature flow in general, has effective in showing geometric inequalities such as isoperimetric inequality, Alexandrov-Fenchel inequality, and Penrose inequality.

In the first part, we introduce basic notions and review such results with brief sketches. Then we discuss the existence and asymptotic behavior of convex non-compact inverse mean curvature flow, which is based on joint works with P. Daskalopoulos and P.-K. Hung.

박지원 (Caltech)

- Title: Convergence of Riemannian manifolds with curvature bounded below
- Abstract: What does it mean that two Riemannian manifolds are "close"? In other words, what is a suitable topology to equip a class of Riemannian manifolds with? Does the closure under that topology include spaces that are no longer Riemannian manifolds, but have singularities? These fundamental questions appear in various circumstances in geometric analysis. In the first talk, I will survey some of the convergence results for classes of manifolds with bound(s) on Ricci curvature or scalar curvature, including Gromov compactness theorem, some aspects of Cheeger-Colding theory, and Sormani-Wenger compactness theorem. In the second talk, I will discuss firstly a method of identifying scales on certain noncompact Ricci flat manifolds, and secondly, a compactness theorem for rotationally symmetric manifolds with positive scalar curvature. The second work is joint with Wenchuan Tian and Changliang Wang.

유성민 (IBS-CGP)

- Title: Kähler-Einstein metrics, Kähler-Ricci flows, and their deformations
- Abstract: In the first talk, we will briefly review basics of Kähler Geometry and discuss some recent developments with focus on Kähler-Einstein metrics and Kähler Ricci flows.

In the second talk, we will study variations of these metrics along deformations of complex structures. In particular, I will introduce my recent work with Young-Jun Choi on fiberwise Kähler-Ricci flows on families of stronglypseudoconvex domains.

이태훈(고등과학원)

- Title: Gauss curvature flow with an obstacle
- Abstract: Gauss curvature flow describes the shape of a tumbling stone on a beach which is worn down by collision. Interestingly, it was observed by Hamilton that the Gauss curvature flow preserves its flat sides for some time. Since the flow with flat sides can be formulated as a free boundary problem with zero lower obstacles, it is a natural question that how a flow with upper obstacles evolves.

In this talk, we address the (upper) obstacle problem for the Gauss curvature flow that models a tumbling stone with a hard core which makes the erosion stop. In particular, we focus on the shape of solutions near the obstacle and describe the limit behavior. This is a joint work with K.-A. Lee.

연응범 (서울대학교)

- Title: Existence and uniqueness results on capillary minimal surfaces via Weierstrass representation formula
- Abstract: There are various results on the existence and uniqueness of capillary minimal surfaces. Capillary minimal surface in a domain is a minimal surface which meets in a constant contact angle along . If the contact angle is a right angle then such a surface is called a free boundary minimal surface. A famous Fraser-Li conjecture asks if the critical catenoid would be the only embedded free boundary minimal annulus in a unit ball in . In this talk, I will describe some of the recent results on the existence and uniqueness of capillary minimal surfaces mostly exploiting a well known Weierstrass representation formula. First part of the talk will include some results on the existence/nonexistence of a capillary minimal surface outside the unit ball in . Second part of the talk will include some results and observations regarding Fraser-Li conjecture based on a joint work with Jaehoon Lee.

이재훈 (서울대학교)

- Title: MINIMAL SURFACES LIKE THE LAGRANGIAN CATENOID
- Abstract: The Lagrangian catenoid in is one of the minimal Lagrangian surfaces constructed by Harvey and Lawson. It is asymptotic to two -planes and has total curvature . Since there is no minimal surface with two embedded planar ends , its asymptotic behavior is only possible in high codimension. So it is natural to ask in high codimension whether there is any other minimal surface with two complete ends of the same type. In this talk, we discuss embedded planar ends in arbitrary codimension. Then we prove some results on the non-existence of minimal surface with two embedded planar ends and a positive genus.

김홍종 (GIST,서울대학교)

- Title: The elements of Euclid

김영욱 (고려대학교)

- Title: 우리 수학의 역사에서 배우는 것

참고자료 (모두 온라인에서 찾을 수 있음)

(1) B. Eynard. Lectures on compact Riemann surfaces. Doctoral. Paris-Saclay, France. 2018. cel-02013559

이 자료의 1장과 2장에서 강의록의 틀을 가져왔습니다. 강의 내용을 좀 더 자세히 살펴보고자 한다면 이 자료를 찾아보시면 됩니다.

(2) Riemann surfaces, dr C. Teleman (Lent Term 2003)

대학에서 강의한 자료인 것 같은데, 일독을 권합니다. 자세한 내용은 종종 빠져있지만 직관적인 설명이 손그림과 함께 흥미롭게 제시되어 있습니다.

(3) A minicourse on moduli of curves, Eduard Looijenga (Lectures given at the School on algberaic Geometry, Trieste, 1999)

Riemann surface의 moduli count $3g-3$를 다양한 관점에서 설명합니다.

(4) David D. Ben-Zvi, Moduli spaces

거의 수식이 없는 글로, moduli의 개념에 대해 소개합니다. moduli space의 대표적인 예로 moduli of elliptic curves와 Teichmüller space를 다루고 있기 때문에 본 강의와 김현규 교수님 강의에 좋은 참고자료가 될 것 같습니다.

(5) Cohomological obstructions for Mittag–Leffler Problems, Mateus Schmidt, arXiv:2010.11812v1 [math.CV] 22 Oct 2020

리만면 연구를 Mittag–Leffler problem을 일반화한다는 것과 같은 것으로 이해할 수 있습니다. 이런 관점을 정확히 서술하기 위한 여러 종류의 cohomology 이론과 특히 sheaf cohomology가 상세히 설명되어 있습니다.

There are three doors to access to the object called a Riemann surface: differential geometry, algebraic geometry, and complex analysis. Historically the concept of Riemann surface emerged as a geometric object to understand and solve the problems in these areas. An access from algebraic geometry has computational advantages, but it may hide the geometric intuitions behind the computations. An access from differential geometry is quite a natural approach, and I hope we can have a lecture series in this prospect in the

next years. In this lecture, I'll adopt complex analysis as the main tool for explanation, because it captures the point with a small amount of machinery.

A *Riemann surface* is a smooth surface whose transition maps $\{\psi_{U\to V}\}$ are biholomorphic. In other words, it is a surface equipped with a complex structure. In this talk, we will consider the *compact* Riemann surfaces only.

Every Riemann surface is orientable, because the complex structure provides the orientation in each chart: $v \mapsto \sqrt{-1}v$. Hence the only topological invariant is the genus g (or the Euler characteristic $\chi = 2 - 2g$).

As I understand, the original definition of Riemann surfaces was given in terms of conformality. A $\mathcal{C}^1$-map $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is conformal (angle-preserving) and preserves the orientation if and only if it satisfies the Cauchy-Riemann equations. In this sense, a Riemann surface is an orientable surface equipped with a notion of angles. (The metric $(v, v) = \sqrt{||v||}$ is not preserved, but we can measure the angle $\dfrac{(u, v)}{||u||\,||v||}$ on a Riemann surface). This gives hint to the fact that complex tori $\mathbb{C}/\Lambda$ may have different structures of Riemann surfaces as the lattices are deformed.

Find pictures from David Xianfeng Gu's gallery:
https://www3.cs.stonybrook.edu/ gu/gallery/RiemannSurface/index.html

The Riemann sphere S^2 is the Riemann surface of genus 0. It is the sphere $X^2+Y^2+Z^2 = 1$ equipped with two charts given by the stereographic projections ϕ_1 (from the north pole) and ϕ_2 (from the south pole):

$$\phi_1(X, Y, Z) = \frac{X + iY}{1 + Z} \quad \text{and} \quad \phi_2(X, Y, Z) = \frac{X - iY}{1 - Z}.$$

Note that the transition map $\psi_{1\to 2} = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} = 1/z$ is biholomorphic:

$$\left(\frac{X + iY}{1 + Z}\right)^{-1} = \frac{1 + Z}{X + iY} = \frac{(1 + Z)(X - iY)}{X^2 + Y^2} = \frac{X - iY}{1 - Z}$$

There is no (nonconstant) holomorphic function on the whole Riemann sphere, due to the Liouville's theorem. Hence we should consider the meromorphic functions instead. Riemann sphere can be regarded as a mathe-

matical object/construct on which we can run the complex analysis (on $\mathbb{C}$), observing the behaviour near ∞.

Every meromorphic function f on the Riemann sphere is a rational function $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$: After killing the poles of f inside $\mathbb{C}$ by multiplying a suitable polynomial, the function $f(z)\cdot\prod_{i=1}^{k}(z-z_i)^{m_i}$ is an entire holomorphic function which may have a zero/pole at ∞. It must be a rational function.

A torus $T_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$, $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$, has a structure of Riemann surface of genus 1. The transition maps between two charts are given by the translations, which are obviously biholomorphic. Again, there is no (nonconstant) holomorphic function on the Riemann surface T_τ, because every doubly periodic holomorphic function is constant. Hence we should consider the doubly periodic meromorphic functions on $\mathbb{C}$. They are the meromorphic functions ϕ on $\mathbb{C}^*$ such that $\phi(qw) = \phi(w)$, where $q = \exp(2\pi i\tau)$. Indeed, $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}^*$ and a doubly periodic function on $\mathbb{C}$ can be regarded as a function $\phi : \mathbb{C}^*/\langle q\rangle \to \mathbb{C}$. For example, the function

$$\mathcal{P}(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right)$$

is a meromorphic function on T_τ (called the *Weierstrass $\mathcal{P}$-function*), which has a double pole at $z = 0$.

Notably, there is a *moduli* of Riemann surfaces of genus 1, produced by the lattice point τ. For example, the Riemann surfaces $\{T_{ib} = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + ib\mathbb{Z}) : 1 < b\}$ are not biholomorphic to each other. There is a 1-(complex)-parameter family of complex analyses over a torus. (In contrast, there is a unique complex analysis on S^2.)

Right after Riemann defined the objects corresponding to "Riemann surfaces", he computed the *moduli*(= number of parameters) of Riemann surfaces. For higher genus $g > 1$, "Riemann's count" says there are $3g - 3$ moduli of Riemann surfaces of genus g. We will see this number later in the lecture on Teichmüller space. This numbers are given as the first Čech

cohomology group of the holomorphic tangent bundle:

$$H^1(S, \Theta_S) \;=\; \begin{cases} 0, & g = 0 \\ 1, & g = 1 \\ 3g-3, & g > 1 \end{cases}$$

A concrete way to get Riemann surfaces is provided by the algebraic equations. For a polynomial function $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, put

$$\Sigma = \{(x, y) \;:\; P(x, y) = 0\} \;\subset\; \mathbb{C}^2.$$

This is a "branched covering" of $\mathbb{C}$ given by the projection $(x, y) \mapsto x$. On each neighborhood of $(x_0, y_0) \in \Sigma$ such that $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, we can use x as the coordinate of the "complex algebraic curve". Let

$$\Sigma_{sing} = \{(x, y) \;:\; P(x, y) = 0 \text{ and } \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0\}.$$

The x-coordinates of Σ_{sing} are precisely the solutions to the equation

$$0 = \text{Discriminant}(P(x, \cdot)) \;=\; \text{Resultant}\left(P(x, \cdot),\; \frac{\partial P}{\partial y}(x, \cdot)\right),$$

which is a finite set of isolated points. We can compactify Σ by adding the points at infinity: Embed Σ into $\mathbb{CP}^2$ and take the closure("projectivization"). The resulting object $\overline{\Sigma}$ is a complex manifold outside a finite number of singularities at the points Σ_{sing} and possibly at the points of infinity($\overline{\Sigma} \setminus \Sigma$). We need to "resolve" the singularities of $\overline{\Sigma}$, which can be cooked according to an algebraic recipe. Here are samples:

Sample 1 $\Sigma :\; x^2 + y^2 = 1 \;\subset \mathbb{C}^2$.

The projectivization $\overline{\Sigma}$ is given by $X^2 + Y^2 = Z^2$ in $\mathbb{CP}^2$ and the points at infinity are:

$$\overline{\Sigma} \setminus \Sigma \;=\; \{(i : 1 : 0),\; (-i : 1 : 0)\}.$$

It can be checked that these two points are smooth points of $\overline{\Sigma}$ and the surface $\overline{\Sigma}$ is biholomorphic to the Riemann sphere by the Pythagorean triple formula $\Phi : \mathbb{C} \to \overline{\Sigma}$:

$$\Phi(z) = \left(\frac{2z}{1+z^2}\,,\; \frac{1-z^2}{1+z^2}\right).$$

This should be understood as the map $\Phi : \mathbb{C} \to \Sigma$ for $z \neq \pm i$ and

$$\Phi(\pm i) = (2z : 1 - z^2 : 1 + z^2)\Big|_{z=\pm i} = (\pm i : 1 : 0).$$

(The inverse map is given by $\Phi^{-1}(X : Y : Z) = \dfrac{X}{Y + Z}$.)

Sample 2 $\Sigma : \ y = x^3 \ \subset \mathbb{C}^2$.

The projectivization $\overline{\Sigma}$ is given by $YZ^2 = X^3$ in $\mathbb{CP}^2$ with one point at infinity:

$$\overline{\Sigma} \setminus \Sigma \ = \ \{\infty := (0 : 1 : 0)\}.$$

Near ∞, the surface looks like a cusp $C : z^2 = x^3$. To resolve this singularity, embed this piece C into $\mathbb{C}^3$ and "blow up" by adding the "slope" variable:

$$Bl_\infty C \ = \ \{(x, z, w) \in \mathbb{C}^3 \ : \ z^2 = x^3, \ xw = z\}.$$

This is union of two (complex) curves: $Bl_\infty C \ = \ C_1 \cup C_2$, where C_1 is projected down to C and C_2 is the w-axis. Since C_1 is parameterized by $(x = t^2, \ z = t^3, \ w = t)$, Since the smooth curve C_1 is isomorphic to C outside $(x, z) = (0, 0, 0)$, we say that C_1 is a desingularization of C. (The projection map $C_1 \to C$ is bijective, but it is not "biholomorphic" because C is not smooth at the origin.) The point $(0, 0) \in C$ is called a cusp.

Now the resolution of singularity $\widetilde{\Sigma}$ of $\overline{\Sigma}$ is obtained by replacing the piece $C \subset \overline{\Sigma}$ by C_1. It is again biholomorphic to the Riemann sphere via $z \mapsto (z, z^3)$.

More generally, starting from any graph curve $\Sigma : \ y = Q(x)$, we can resolve $\overline{\Sigma} \subset \mathbb{CP}^2$ to get a Riemann surface $\widetilde{\Sigma}$ which is biholomorphic to the Riemann sphere.

Sample 3 To get a Riemann surface of genus $g \geq 1$ from algebraic equation, we need to start from a polynomial $P(x, y)$ of degree ≥ 3. Let Σ be the plane curve associated to $P(x, y) = y^2 - x^3 + x$.

Note that $\Sigma_{sing} = \{(0, 0)\}$, but at this point $\frac{\partial P}{\partial x}(0, 0) = (1, 0)$. So we can use y as the local coordinate near $(0, 0)$. The compactified curve is given by $Y^2Z - X^3 + XZ^3 = 0$ and this has one point at infinity: $\infty = (0 : 1 : 0)$.

Near ∞, this curve looks like $z - x^3 + xz^3 = 0$, which is smooth at $(0,0)$. Therefore, $\widetilde{\Sigma} = \overline{\Sigma}$ in this case.

What is the genus of $\widetilde{\Sigma}$? Let us briefly introduce the classical construction of $\widetilde{\Sigma}$ from the multi-valued function $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$. First, the projection map $(x, y) \mapsto y$ is well-defined on Σ. In other words, the function $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$ is well-defined and it extends to a meromorphic function on $\overline{\Sigma}$, or a holomorphic map $\overline{\Sigma} \to \mathbb{CP}^1$. Recall that this is not single-valued over $\mathbb{C}$ (or $\mathbb{CP}^1$). To explain more details of this phenomenon, observe that the projection map $\pi(x, y) = x$ makes $\overline{\Sigma}$ a double (branched) covering of $\mathbb{CP}^1$, with four branch points $\pm 1, 0$, and ∞. $\cdots\cdots$

Sample 4 Now we start from the polynomial: $P(x, y) = y + x^3 + x^2 y$. Note that the curve $\Sigma = \{P(x, y) = 0\}$ is smooth. But its projectivization is given by $YZ^2 + X^3 + X^2 Y = 0$, which has a point at infinity $\infty = (0 : 1 : 0)$. Near the point $(x, z) = (0, 0)$, this looks like $C : z^2 + x^3 + x^2 = 0$. It is singular at $(0, 0)$, so we blow it up to get:

$$Bl_\infty C \;=\; \{(x, z, w) \in \mathbb{C}^3 \;:\; z^2 + x^3 + x^2,\; xw = z\}.$$

Let $C_1 = Bl_\infty C \setminus w$-axis. Then along the curve C_1, we have

$$\lim_{(x,z)\to(0,0)} w^2 \;=\; \lim_{(x,z)\to(0,0)} \frac{-x^3 - x^2}{x^2} = -1.$$

Hence in the limit $(x, z) \to (0, 0)$, we have $w \to \pm i$. We see that in this case the projection $\pi : C_1 \to C$ is bijective outside w-axis, and $\pi^{-1}(0, 0) = (0, 0, \pm i)$. This is a resolution of a nodal singularity.

A polynomial $P(x, y) = y^2 - \prod_{i=1}^{d}(x - x_i)$ for distinct x_i's yields a Riemann surface of genus $g = \left\lfloor \dfrac{d-1}{2} \right\rfloor$. These Riemann surfaces are called the *hyperelliptic curves*, named after the elliptic curves which correspond to the $g = 1$ case ($d = 3, 4$). Similarly, we can associate a Riemann surface to arbitrary polynomial $P(x, y)$. In fact, the converse is also true:

Every compact Riemann surface can be algebraically immersed into $\mathbb{CP}^2$, *with at most simple nodal points.*

In this sense, the compact Riemann surface (in differential geometry or complex analysis) is the same as the algebraic curve (in algebraic geometry).

As we have seen, the function theory on a Riemann surface S and the geometry of S are closely related. First let's establish a general fact which we already observed for $g = 0$ and 1.

Theorem 1 *There is no nonconstant (global) holomorphic function on S.*

Proof. Let f be a holomorphic function. Since S is compact, $|f(z)|$ has maximum at some point, say $p \in S$. If we choose a chart $U \ni p$, the holomorphic function $f_U : U \to \mathbb{C}$ cannot attain the maximum absolute value inside U, unless it is constant (maximum principle). Therefore, f_U is constant and eventually f is constant by the identity theorem. □

Hence the space $\mathcal{O}(S)$ of holomorphic functions on S is nothing but $\mathbb{C}$. (There is no function theory on $\mathcal{O}(S)$.) And we should consider the following objects:

- $\mathcal{M}(S)$: meromorphic functions on S
- $\mathcal{O}^1(S)$: holomorphic forms on S
- $\mathcal{M}^1(S)$: meromorphic forms on S

A meromorphic function $f \in \mathcal{M}(S)$ is nothing but a holomorphic map $S \to \mathbb{CP}^1$. It is not at all obvious if there is any nonconstant meromorphic function on every Riemann surface.[1] In fact, there are plenty of them, but they are subject to a strong constraints as we will see.

A holomorphic(meromorphic) form on S is a collection of 1-forms $\{f_U(z)dz\}$ for some holomorphic(meromorphic) functions f_U on each chart $U \subset S$ such that for each intersection $U \cap V$:

$$f_U(z)dz = f_V(w)dw \quad (w = \phi_{UV}(z)).$$

Equivalently, a form on S is the collection of local functions $\{f_U\}$ satisfying

$$f_U(z) = (f_V \circ \phi_{UV}(z)) \cdot \phi'_{UV}(z).$$

[1] This is okay if we admit the fact that every Riemnan surface can be algebraically defined, because the curve $P(x, y) = 0$ has a projection map $(x, y) \mapsto x$.

More generally, we consider the kth order holomorphic(meromorphic) forms in $\mathcal{O}^k(S)$ ($or in \mathcal{M}^k(S)$) given by a collection of $\{f_U(z)dz^k\}$ satisfying

$$f_U = (f_V \circ \phi_{UV}) \cdot \phi'_{UV}(z)^k.$$

For example, the function $f(z) = z$ on the Riemann sphere is a meromorphic function with a simple pole at ∞, and the form $\omega(z) = dz$ is a meromorphic form which has a double pole at ∞: for $z' = 1/z$,

$$\omega(z) = dz = d(1/z') = \frac{-1}{(z')^2} dz'.$$

This shows that there is no holomorphic form on $\mathbb{CP}^1$: a form $f(z)dz$ in one chart is transformed to $-\frac{1}{(z')^2} f(\frac{1}{z'})dz'$ in another chart.

The *order* of a function $f = \{f_U\}$ (or a form $\omega = \{f_U dz\}$) at $p \in S$ is the order of f_U for a chart $U \ni p$. It is written as $\mathrm{ord}_p f$ (or $\mathrm{ord}_p \omega$). the order at p is zero if and only if f_U has neither a zero or a pole at p. Given a form $\omega \in \mathcal{M}(S)$, the *residue* of ω at p is $\mathrm{Res}_p \omega = c_{-1}$, where

$$\omega = f_U(z)dz, \quad f_U(z) = \sum_{j=-1}^{-d} c_j z^j + \text{analytic}.$$

In fact, $\mathrm{Res}_p f$ of a meromorphic function $f(z)$ on $\mathbb{C}$ is equal to $\mathrm{Res}_p \omega$ of the form $\omega = f(z)dz$ on the Riemann sphere. Cauchy's theorem says that

$$\mathrm{Res}_p \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} \omega,$$

where C_p is a small anti-clockwise contour around p.

Exercise The order $\mathrm{ord}_p f$ and the residue $\mathrm{Res}_p \omega$ are independent of the choice of the chart and coordinates. On the other hand, the coefficients c_j for $j \leq -2$ do depend on the choice.

Theorem 2 *For $\omega \in \mathcal{M}^1(S)$, the total residue is zero:*

$$\sum_p \mathrm{Res}_p(\omega) = 0.$$

Proof. The surface S can be polygonalized: there is a graph on S whose faces are polygons entirely contained in a chart such that each pole of ω lie inside some polygon. The sum of residues is the sum of the integral along each polygons, which cancels out each other. □

Corollary 3 *There is no $\omega \in \mathcal{M}^1(S)$ with only one simple pole.*

Given a nonzero $f \in \mathcal{M}(S)$, the *divisor of* f is defined by

$$(f) = \sum_{p \in S} (\mathrm{ord}_p f) p.$$

This is a formal $\mathbb{Z}$-linear combination of points of S. Similarly, given a nonzero $\omega \in \mathcal{M}^1(S)$, the *divisor of* ω is

$$(\omega) = \sum_{p \in S} (\mathrm{ord}_p \omega) p.$$

Each nonzero meromorphic function/form has only finitely many poles and zeros. (Why?)

Corollary 4 *For $g \geq 1$, there is no $f \in \mathcal{M}(S)$ with only one simple pole.*

Proof. We use the fact that there is a nonzero holomorphic form $\omega \in \mathcal{O}^1(S)$ for $g \geq 1$.[2] If $\mathrm{ord}_p(\omega) = k$, then $f^{k+1}\omega$ is a meromorphic form which has only one simple pole (at p), which is a contradiction. □

The Riemann–Roch formula is the key tool to study the Riemann surfaces. We state a weaker version below.

Theorem 5 *(Riemann's inequality, a weaker version of Riemann–Roch) Let S be a Riemann surface of genus g and $x_1, \ldots, x_d \in S$. For any positive integers $m_1, \ldots, m_d$, the space $L(\sum_{i=1}^d m_i x_i)$ of meromorphic functions, which have a pole at x_i with order $\leq m_i$ and holomorphic elsewhere, is a $\mathbb{C}$-vector space of dimension $\geq (\sum_{i=1}^d m_i) + 1 - g$.*

[2] This is a highly nontrivial fact. It is a key step to show that every Riemann surface is an algebraic curve.

For example, there is a nonconstant meromorphic function if we allow poles with $\sum_{i=1}^{d} m_i > g$. Riemann–Roch's formula is:

$$H^0(S, \mathcal{O}(D)) - H^1(S, \mathcal{O}(D)) = d + 1 - g,$$

where $D = \sum_{i=1}^{d} m_i x_i$ and $H^0(S, \mathcal{O}(D)) = L(\sum_{i=1}^{d} m_i x_i)$.

Theorem 6 *Let f be a nonzero meromorphic function. Then the number of poles (counted with multiplicities) equals the number of zeros.*

Proof. Let $\omega = d(\log f) = \dfrac{df}{f}$. If p is a zero (resp. a pole) of f of order k, then $\mathrm{Res}_p \omega = k$ (resp. $-k$). The result follows from Theorem 2. □

I want to emphasize that unlike the objects in differential geometry, the existence of certain function/form on S is a big issue. If you find some object on S, then it will give you some clue to the symmetry (or a property) of S.

Theorem 7 *Any two meromorphic functions $f, g \in \mathcal{M}(S)$ are algebraically related, that is, there exists a bivariate polynomial P such that $P(f, g) \equiv 0$.*

Does this look plausible to you? (For example, how do you see that any two polynomials $f(z)$ and $g(z)$ are algebraically related?[3]) As you see below, this can be shown by using the fact that every meromorphic function on $\mathbb{CP}^1$ is rational.

Proof. Let $d := \sum_{p\,:\,poles} \mathrm{ord}_p f$. Then f can be thought as a $d:1$ branched covering $S \to \mathbb{CP}^1$. (This is another nice viewpoint for Riemann surfaces.)

For a small open set $U \subset S$ with local chart x, Let $z_1, \ldots, z_d$ be the local charts of $f^{-1}(U)$ such that $f^{-1}(x) = \{z_1, \ldots, z_d\}$. Let

$$\phi(x, y) \;=\; (y - g(z_1))(y - g(z_2)) \cdots (y - g(z_d)).$$

[3]This can be shown by linear algebra. Suppose $\deg f = m$ and $\deg g = n$. For large N, the vector space generated by $f^k g^\ell$'s for $k \le \frac{N}{2m}$ and $\ell \le \frac{N}{2n}$ has dimension $\le \frac{N^2}{4mn}$. On the other hand, this space is contained in $\langle 1, z, z^2, \ldots, z^N \rangle$ which has dimension $N+1$. As N gets large enough, $\frac{N^2}{4mn} > N + 1$ and so there should be some polynomial relation between f and g.

This is a polynomial in y, whose coefficients $s_i(x), 1 \leq i \leq d$, are meromorphic functions : $U \to \mathbb{CP}^1$. These function can be extended to the whole $\mathbb{CP}^1$, including the branch points. Therefore $s_i \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$ and they are rational functions in x. This confirms that $\phi(x, y)$ is a rational function in x and y and $\phi(f(z), g(z)) \equiv 0$ on S. $\square$

As an example, recall the Weierstrass $\mathcal{P}$-function on T_τ:

$$\mathcal{P}(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

Its derivative is given by

$$\mathcal{P}'(z) = -2 \sum_{w \in \mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}} (z-w)^{-3}.$$

Then $(\mathcal{P}'(z))^2 = 4\mathcal{P}(z)^3 - g_2\mathcal{P}(z) - g_3$ for some $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ which are computed from the lattice $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$. This gives the "algebraic equation" of T_τ given by

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \ : \ y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3\}.$$

More details: Define

$$\Phi : T_\tau \to \overline{E} = E \cup \{\infty\} \subset \mathbb{CP}^2$$

by $\Phi(z) = (\mathcal{P}(z) : \mathcal{P}'(z) : 1)$. It can be checked that this is an embedding of T_τ into $\mathbb{CP}^2$ whose image is an algebraic curve (zero set of a plane cubic curve). The coefficients g_2 and g_3 (more precisely, the j-invariant $= g_2^3 - 27g_3^2$) provide the moduli of Riemann surfaces of genus 1 (= elliptic curves).

CHAPTER 6

타원적분 · 타원함수 · 타원곡선

김영욱 (고려대학교)

이 강의의 목표

이 강의록의 목표는 타원적분에서 시작하여 타원함수 그리고 타원곡선으로 이어지는 18～19세기 수학의 역사를 짚어보려는 것이다. 이 역사를 추리는 원래 계획은 19세기의 몇 수학자의 업적을 검토하는 것으로 충분하리라는 것이었지만 이 역사는 생각보다 방대하여 원래 계획보다 훨씬 많은 수학자들을 검토하지 않을 수 없었다. 그러나 시간의 압박으로 이 수학자들의 업적을 전부 찾아볼 시간도 없었으며 다른 수학자들이 요약해 놓은 내용을 참조하는 수준에서 만족할 수밖에 없었다.

가벼운 마음으로 시작하였으나 역사서를 찾아보니 타원적분 이론의 역사는 19세기에 이름난 수학자 전부가 기여한 그런 이론이었고, 19세기에 한 번 만개한 다음 바이에르스트라스와 리만을 기점으로 하여 다시 새로운 방향으로 꽃피어 20세기 수학 전체를 낳은 그런 이론이라는 것을 알았다. 단순히 나의 전공과 관련이 있다는 막연한 생각에서 시작했지만 내가 공부했던 모든 것을 아우를 뿐만 아니라 내가 들어 본 거의 모든 수학을 아우른다고 해야 할 그런 이론이었던 것이다.

여기서 이 이론과 그 역사를 개관하는 것은 짧은 아티클 하나로 가능한 것이 전혀 아니고 여러 권의 전문서를 동반하여야 하는 것임을 깨닫는데 오래 걸리지 않았다. 그래서 여기서는 1) 초기 타원적분 이론에서 사람들이 이 적분 계산을 어떤 방향으로 시도했는가 2) 아벨과 야코비에 이르러 나타난 새로운 아이디어는 어떤 것인가 3) 그

리고 다시 바이에르스트라스와 리만의 생각은 어떤 방향으로 나아갔고 결과적으로 어떻게 서로 보완적인 이론이 되었는가 정도 수준에서 마치기로 한다.

이 뒤를 이은 20세기 수학의 발전은 매우 중요하지만 그것을 설명한다는 것은 여기서는 불가능하고 단지 리만이 생각한 것은 바이에르스트라스의 국소적이고 해석적인 이론을 곡면에서 이어붙이는 데 필요한 모든 생각을 했다는 것을 강조하여 둔다. 즉 바이에르스트라스는 완전히 국소해석학적인 이론–즉 멱급수를 이용한 해석함수의 이론–을 거의 완벽하게 전개했다면, 리만은 이것을 이어 붙이는 데 필요한 도구인 대수적 위상기하학과 추상적 곡면의 이론 및 국소이론에서 필요한 타원형 편미분방정식의 대역적 이론에 까지 거의 모든 대역적 이론의 바탕을 마련한 듯이 보인다.

결국 바이에르스트라스의 이론은 현대 1변수 복소해석학의 바탕이 되었으며 리만의 이론은 현대 다변수 복소해석학 및 복소기하학의 바탕이 되었다고 할 수 있다. 그리고 타원곡선의 이론은 현대 대수학 및 정수론 그리고 복소 및 대수기하학의 시작점으로 확고한 위치를 차지하고 있다.

이 개관 논문에 참조한 문헌은 여러 가지가 있지만 참고문헌에 소개된 정도로 그쳐 둔다. 이 문헌들의 참고문헌에서 방대한 관련 문헌 리스트를 볼 수 있을 것이다. 전체적으로 Klein의 19세기 수학사에 대한 유명한 책 [7]을 참조하면 좋다. 또 타카기(高木貞治)의 유명한 19세기 역사 모노그라프인 [16]은 가벼운 마음으로 읽을 수 있는 그러나 수학적으로 깊은 해설을 한 책이고, 최근에 Jeremy Gray와 Umberto Bottazzini가 쓴 무려 850쪽에 달하는 저술 [1]은 19세기 복소해석학 발달사의 방대한 연구 업적이라 하겠다. 또 Shafarevich의 대수기하학 교과서의 부록의 역사 부분 [9]는 이 부분의 역사를 매우 잘 요약한 읽을거리이다. 교과서로는 Siegel의 명저 [10]이 역사적 관점에서 관련된 수학을 잘 설명하고 있다. 한편 현대적 관점에서 리만의 이론을 잘 설명한 것으로는 몇 가지 리만면에 대한 좋은 참고서들이 있다. 대수기하적 관점에서는 Griffiths의 책 [4]를, 복소기하학의 관점에서는 H. H. Wu의 책 [14]를 추천한다. 그리고 특히 Sheaf의 이론에서 시작하여 아주 쉽게 소개하여 나간 Gunning의 책 [5]도 명저이다. 마지막으로 우리의 목표인 정수론과의 연계를 일목요연하게 써내려간 Silverman과 Tate의 저서 [11]과 대수적 관점에서 쓴 이와사와의 저서 [15]를 소개하여 둔다.

6.1 『BSD 추측』과 타원곡선 [11, 13]

계수가 유리수인 두 변수 다항식으로 만들어진 방정식 $f(x,y)=0$의 유리수 해를 구하려고 한다고 하자. 이미 Diophantus도 알고 있었듯이 이 방정식이 어떠한 방정식이냐에 따라 이 문제는 어려울 수도 있고 쉬울 수도 있다.

앞에서 공부한 바와 같이 f가 2차식일 때 이 방정식의 해 (x_0,y_0)를 단 하나만 알고 있으면, 이로부터 다른 모든 해들을 유리수 매개변수 t를 사용하여 나타낼 수 있다. 즉 점 (x_0,y_0)를 지나고 기울기 t인 직선이 이 방정식의 그래프와 만나는 점을 구해나가면 된다. 이것이 Diophantus가 잘 사용한 방법이다. f가 3차식이나 4차식일 때에 Diophantus가 시도한 방법들도 이미 유리수 해를 알고 있을 때 이로부터 새로운 해를 찾아내는 방법이고 이 방법은 Fermat에 이르러 여러 문제에 사용되었다. 그러나 그보다 고차식인 경우에는 해를 구해내는 일반적인 방법은 알려진 것이 없다.

Poincaré는 이렇게 해가 구해지는 경우가 세 가지로 나뉘는 이유는 방정식 $f(x,y)=0$를 만족시키는 복소수 점으로 이루어진 곡선 $X(\mathbb{C})$의 위상 특히 그 곡선의 genus(종수)에 따라 달라진다는 사실을 알아내었다. $g=0$인 경우에는 이 곡선 위의 유리수 점의 집합 $X(\mathbb{Q})$는 위상적으로 사영곡선 $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$가 된다. 그런데 $g=1$이면 $X(\mathbb{Q})$는 공집합이거나 아니면 가환군이 된다. 실제로 이 경우에 곡선의 방정식을 항상

$$y^2=4x^3-ax-b \quad (a,b\in\mathbb{Z})$$

라고 나타낼 수 있다는 것을 Weierstrass가 보였고, 이 위의 군의 구조는 세 점 P, Q, R이 한 직선 위에 놓이는 유리수 점이면 $P+Q+R=0$이고, $P=(x,y)$일 때 $-P=(x,-y)$라고 덧셈을 정의하면 된다는 Diophantus의 작도법도 공부하였다. 한편 $g\geq 2$이면 Faltings가 Mordell의 예상을 해결해 주어서 $X(\mathbb{Q})$가 유한집합임을 알고 있다.

따라서 가장 관심이 가는 부분은 $g=1$인 타원곡선의 경우이다. 타원곡선은 E로 잘 나타낸다. 이 경우에 Poincaré가 추측하고 Mordell이 증명한 것은 이 곡선의 유리수 점의 집합 $E(\mathbb{Q})$는 유한개의 원소로 생성되는 가환군이라는 것이고 이것을

$$E(\mathbb{Q})\simeq\mathbb{Z}^r\oplus\mathcal{F}$$

라고 나타낼 수 있다. 여기서 군 $\mathcal{F}$는 다항식 $4x^3-ax-b$의 유리해가 0개, 1개 또는 3개인가에 따라 각각 $\mathbb{Z}/(2n-1)\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ 이거나 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$가 된다는 것이 알려져 있다. 그리고 여기서 n은 각각의 경우에 ≤ 5, ≤ 6 또는 ≤ 4가 된다는 Mazur(1977)의 정리는 어려운 정리이다. 한편 $r=14$가 되는 경우가 있다는 것은 Mestre(1983, 1984)

에 의하여 알려졌다.

우리가 이번 여름에 목표로 삼는 『BSD 추측』은 1960년 경에 두 수학자 Birch와 Swinnerton-Dyer가 생각해낸 것으로 위의 r을 구해낼 수 있는 방법을 주는 것이다. 여기서는 이러한 논의의 배경이 되는 타원함수와 타원곡선의 이론이 발전된 과정을 역사를 따라서 살펴본다.

6.2 타원함수의 역사 속의 인물

6.2.1 파냐노와 오일러 [2, 10]

타원함수를 가장 먼저 연구한 것은 아마도 이탈리아의 파냐노 백작(Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano, 1682–1766)일 것이다. 파냐노는 1714년에 lemniscate의 호의 길이를 연구하였다. lemniscate는 극좌표로 $\rho^2 = \cos 2\theta$로 정의되고 두 개의 루프로 이루어진 여덟팔자 모양의 곡선이다. 이 호의 길이 적분은

$$\int \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} \tag{6.1}$$

로 나타내어 지며 파냐노는 이에 대하여

$$\int_0^v \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = 2\int_0^w \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

가 된다면 v와 w 사이에 놓이는 대수적 관계를 적분의 변수변환을 이용해서 구체적으로 알아내었다. 이것이 타원적분에 대한 2배각 공식이다. 이 결과는 1750년에 독일 학술원에 그의 평생의 업적을 제출하는 내용 속에 다시 한 번 기록되었다.

파냐노의 결과가 갖는 의미를 생각해 보자. 이 타원적분은 그 상한을 변수로 볼 때 초월함수이다. 그러나 이 초월함수인 곡선의 길이가 2배가 되도록 하면 그 변수(상한) 사이에는 대수적인 관계가 있다는 것이다. 즉 초월함수 자체보다는 그 역함수 쪽에 좋은 관계가 보인다는 말이 된다. 아마도 파냐노가 계산하였음직한 변수 변환 방법이 Siegel의 교과서 [10]에 자세히 설명되어 있다.

오일러(Leonhard Euler, 1707–1783)는 1738년에 이미 파냐노의 이 결과보다 일반적인 타원적분의 여러 가지 성질을 알고 있었고 계속 연구하여 1750년 경에는 타원적분의 가법정리가 성립함을 알아내었다. 그가 사용한 방법은 파냐노가 사용한 변수변환이 아니라 다음과 같은 미분방정식이다:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}.$$

오일러가 잘 사용한 방법은 이렇게 미분형식을 사용하여 나타내고 계산하는 방법이었다.

이러한 이론이 가지는 의미를 알아보기 위하여 먼저 사인 함수를 보자. $u = \sin s$라 하면

$$s = \arcsin u = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

이 된다는 것은 미적분학에서 공부하였다. 이 때 사인 함수의 각의 합의 공식을 이 역함수에 대하여 쓰면 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$\int_0^u \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} + \int_0^v \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \int_0^w \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}.$$

여기서 $w = u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2}$이다.

이것이 어째서 각의 합의 공식인가를 알아보기 위하여 좌변의 두 적분을 각각 x, y라 하면, $u = \sin x$, $v = \sin y$이다. 이제 우변을 $x + y = z$라 부르기로 하면 우변의 적분의 상한을 w라 놓고 계산해 보면

$$\begin{aligned} w &= \sin z = \sin(x+y) \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ &= u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2} \end{aligned}$$

이 됨을 알 수 있다. 오일러는 이런 공식을 적분 (6.1)에 대하여도 찾아낸 것이다. 이 때의 공식은 다음과 같다: 즉

$$\int^u \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} + \int^v \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \int^w \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} \tag{6.2}$$

라 하면

$$w = \frac{u\sqrt{1-v^4} + v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2} \tag{6.3}$$

이 성립한다.

오일러는 이러한 답이 나오리라는 것을 삼각함수의 경우 공식에서 추측해내고 적분을 통하여 적분식 (6.2)을 보였다. 관계식 (6.3)에서 w를 고정시키고 나서 미분을 계산하여 보면 보면

$$0 = \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} + \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}$$

을 얻는다. 위의 관계식 (6.3)에 의하여 $v = v(u)$라고 정해진다고 하고 적분하여 보면

$$\int^u \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} + \int^{v(u)} \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = C$$

를 얻고, $u \sim 0$이면 $v(u) \sim w$이므로 따라서 $C = \int^w dr/\sqrt{1-r^4}$이라는 것을 알 수 있다.

6.2.2 르장드르[1]

르장드르(Adrien-Marie Legendre, 1752–1833)는 파리의 부유한 가정에서 태어나 공부했다. 그는 프랑스 혁명(1793) 때에 그의 재산을 모두 잃었으나 곧바로 결혼하였고 그 부인의 내조로 잘 극복해 나갔다고 한다.

그가 타원적분을 공부하게 된 것은 오일러와 마찬가지로 기하학적 문제에서 부터이다. 1788년에 발표한 그의 첫번째 결과를 보면 "타원의 호의 길이 적분에 대한 소고"[1]라고 되어 있다. 이 논문에서 처음으로 일반적으로

$$\int \frac{P\,dx}{R}, \quad (P\text{는 유리함수이고, } R\text{은 4차함수의 제곱근})$$

꼴의 적분을 간단히 하면 항상

$$\int \frac{Q\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-c^2t^2)}}$$

꼴로 바꿀 수 있다는 것을 보였다. 그는 여기서 $t=\sin\phi$라고 치환하여 적분 꼴을

$$\int \frac{Q\,d\phi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\phi}}$$

로 바꾸었으며 여기서 ϕ를 이 타원적분의 진폭함수(amplitude), c를 이 적분의 모수(母數 modulus)라고 불렀다. 그는 이 피적분함수의 분모의 항을 $\Delta=\Delta(\phi)=\sqrt{1-c^2\sin^2\phi}$라고 불렀으며 이 항을 따라서 타원적분을 분류하였다. 그 분류는 모든 사람들에게 받아들여져서 현재까지도 사용되고 있다. 그에 따르면

$$\int_0^x \frac{d\phi}{\Delta} \quad \text{즉} \quad \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-c^2z^2)}}$$

꼴로 표현가능한 것은 제1종 타원적분이라 분류했고,

$$\int_0^x \Delta d\phi \quad \text{즉} \quad \int_0^x \sqrt{\frac{1-c^2z^2}{1-z^2}}\,dz$$

꼴로 표현되는 적분은 제2종, 그리고

$$\int_0^x \frac{d\phi}{(1+n^2\sin^2\phi)\Delta} \quad \text{즉} \quad \int_0^x \frac{dz}{(1-a^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-c^2z^2)}}$$

꼴로 표현되는 적분은 제3종 타원적분이라 불렀다. 여기서 a, n 등의 계수는 복소수 값 까지도 가질 수 있다.

르장드르는 오일러의 미분방정식을 더 간단히하여

$$\frac{d\phi}{1-c^2\sin^2\phi}=\frac{d\psi}{1-c^2\sin^2\psi}$$

[1] Mémoire sur les intégration par d'arc d'ellipse. (1788)

와 같은 꼴로 바꾸었고 이 미분형식의 적분으로 나타내어지는 함수를 $F(\phi)$라고 할 때 이 함수는 적분 상수 μ에 대하여 관계식 $F(\phi)+F(\psi)=F(\mu)$를 만족시킨다는 것을 보였다. 오일러의 가법정리와 비교하여 보면 이 결과는

$$\cos\phi\cos\psi-\sin\phi\sin\psi\Delta(\mu)=\cos\mu$$

에 해당하고 이는 오일러의 가법정리의 함수방정식꼴이라고 할 수 있다.

그러나 르쟝드르의 연구는 이 적분을 단순히 실수 적분으로서만 접근하고 있었을 뿐만 아니라 이의 적분 함수의 역함수를 바라볼 아이디어를 갖고 있지 않았다. 후일에 야코비가 지적한 것은 삼각함수의 경우에 적분함수 $\int^x dt/\sqrt{1-t^2}$가 주는 함수인 $y=\arcsin x$ 보다는 그 역함수인 $x=\sin y$가 훨씬 더 다루기 좋은 함수라는 점을 간과한 것이었다. 즉, 이렇게 역함수를 사용하면 함수 $\sin y$는 다루기 좋은 주기함수가 되는 반면에, 함수 $\arcsin x$는 한 점 x에서 여러 개의 값을 갖는 복잡한 함수(다가함수)라는 것이다.

타원적분에 대한 르쟝드르의 업적은 그의 생애 전반을 걸쳐서 크게 주목받지 못하고 있었지만 결국 1827년에 이르러 두 명의 젊은 수학자들에게 이어짐으로써 그 중요성을 인정받게 되었다. 이 두 수학자는 야코비와 아벨이다. 야코비는 르쟝드르와 가깝게 서신 교환을 하면서 자신의 연구 진척을 논의하였으나 아벨은 가끔씩만 서신을 교환했고 그의 논문은 독일에서 새로이 만들어진 학술지인 Crelle에 발표하였다. 이 결과들은 매우 중요한 것이어서 1830년에 르쟝드르의 추천에 따라 파리에 있는 프랑스 과학원(Académie des sciences)은 과학원이 수여하는 최우수상을 이 두 사람에게 공동 수여하게 되었다. 그러나 1830년에는 아벨이 이미 사망한지 1년이 지난 시점이어서 이 상의 상금인 3,000프랑의 절반은 아벨의 유족들에게 지급되었다.

프랑스 과학원이 최우수상을 두 명의 외국인 수학자에게 수여한 것은 이례적인 일이었고 당시에 수여 소감으로는 "수학 이론의 가장 중요한 응용을 제시했으며 … 이 연구 결과에는 놀라운 해석학적 발견이 들어있다."고 평했다. 이 상을 결정하는 데에 포아쏭(Poisson), 푸앵조(Poinsot), 르쟝드르 등이 참여했고 라크루아(Lacroix)가 조사위원을 담당했다고 한다.

6.2.3 가우스[16]

수학자 가운데 가장 유명한 가우스(Johann Carl Friedrich Gauss, 1777–1855)는 약관의 나이에 타원함수에 대한 연구를 시작했다. 그는 평생동안 연구일지를 썼으며 이를

통해서 그의 연구의 전모를 알 수 있다. 그가 맨 처음 이 방면의 연구를 시작한 것은 1797년 1월 8일이고 소위 lemniscate의 호의 길이 함수를 연구하기 시작하였다.

그는 $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta$로 주어진 곡선을 생각하였다. lemniscate 위의 한 점을 P라 하면 호 OP의 길이는 다음 적분으로 주어진다:

$$\text{호 } OP = \int_0^\rho \frac{2a^2\, d\rho}{\sqrt{4a^4 - \rho^4}}.$$

여기서 $OA = 1$, 즉 $a^2 = 1$이라 놓고 $\rho = x$, 호 $OP = u$라 놓으면,

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} \tag{6.4}$$

이다. 가우스는 이 x를 u의 함수로 sinus lemniscaticus라고 부르고

$$x = \text{sin lemn } u = \text{cos lemn}(\omega - u)$$

또는 줄여서 $x = \text{sl}\, u = \text{cl}(\omega - u)$라 불렀다. 우리는 이번 여름 강의를 통틀어서 이 함수를 각각 $s(u)$, $c(u)$라고 쓰고 있다. 여기서

$$\omega = \varpi/2 = \text{호 } OPA = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$$

을 나타낸다. lemniscate 곡선의 원주율에 해당하는 ϖ를 pi lemniscate라고 부른다.

이미 라그랑쥬(Lagrange)는 u를 x에 대한 멱급수 전개로 나타냈고 그 역함수의 멱급수 전개도 알고 있었다. 한편 ω의 값은 오일러가 계산했으며 Leiste의 책 표지에 나와 있을 정도이다.

한편 $s(u)$의 가법정리는 오일러의 미분방정식에서 나온다. 즉,

$$x = s(u), \quad y = s(v), \quad z = s(u + v)$$

라 놓으면,

$$z = \frac{x\sqrt{1 - y^4} + y\sqrt{1 - x^4}}{1 + x^2y^2} = \frac{x^2y^2}{x\sqrt{1 - y^4} - y\sqrt{1 - x^4}}$$

이다. s는 기함수이므로 여기서 $u = \omega$, $v = -w$라 하면, $s(\omega) = 1$, $s(-w) = -s(w)$를 사용해서 다음을 얻는다:

$$s(\omega - w) = \frac{\sqrt{1 - y^4}}{1 + y^2} = \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 + y^2}}, \quad c(w) = \sqrt{\frac{1 - s(w)^2}{1 + s(w)^2}}.$$

그러므로 가법정리

$$s(u \pm v) = \frac{s(u)c(v) \pm s(v)c(u)}{1 \mp s(u)s(v)c(u)c(v)}, \quad c(u \pm v) = \frac{c(u)c(v) \mp s(u)s(v)}{1 \pm s(u)s(v)c(u)c(v)}$$

을 얻는다. 그는 이 가법정리에서 삼각함수와 유사한 주기성과 배각 공식을 얻었다.

예를 들면, ($s(u)=s, c(u)=c$ 라고 나타내면)

$$s(2u)=\frac{2s\,c(1+s^2)}{1+s^4}=\frac{2s\,c(1+c^2)}{1+c^4},\quad s(3u)=\frac{s(3-6s^4-s^8)}{1+6x^4-3s^8}$$

과 같은 식이다. 그는 정17각형 작도에서 계산했던 것과 같은 방식으로 이 배각 공식을 lemniscate의 원주에 적용하였다. 5배각 공식을 계산하면 방정식 $s(5u)=0$은 $s(u)$에 대한 25차방정식이고 이 근 가운데 5개는 실근이고 20개는 허근이 됨을 알았다. 가우스는 이것을 보고 이 문제는 복소변수 함수의 관점에서 접근해야 한다는 것을 깨달았다. 이 20개의 허근은 아벨이 타원함수론 연구를 시작하게 된 시발점이기도 하다.

한편 $s(u)$를 전개하여 보면 $uf(u^4)$ 꼴이 된다. 따라서 공식

$$s(iu)=is(u)$$

를 얻는다. 한편 $c(u)=\sqrt{(1-s^2)/(1+s^2)}=1+g(u^2)$ 꼴이므로 공식

$$c(iu)=\frac{1}{c(u)}$$

가 성립한다. 여기에 가법정리를 쓰면

$$s(t+iv)=\frac{s(t)+ic(t)s(v)c(v)}{c(v)-ic(t)s(t)s(v)},\quad c(t+iv)=\frac{c(t)-is(t)s(v)c(v)}{c(v)-is(v)s(t)c(t)}$$

가 되어서

$$u=(m+ni)2\omega \quad \text{이면} \quad s(u)=0$$

등등으로 계산하여 나갈 수 있었다.

이러한 계산을 통하여 두세 달 후인 1797년 3월 21일에는 $s=s(2\omega/5)$라 하면 $s(5u)$의 배각 공식에서부터 다음 방정식을 얻어내게 된다:

$$(5-2s^4+s^8)(1-12s^4-26s^8+52s^{12}+s^{16})=0.$$

이 계산에서 가우스는 $s(3u)=s(2u)$를 사용하였다.

이러한 진전을 계속해나가서 드디어 19개월이 지난 1798년 7월에는 ϑ-함수에까지 연구가 진전되어 나갔다. 그러나 그는 이러한 일련의 연구 결과를 발표하지 않았다. 아마도 연구 결과가 원하는 데까지 깨끗하게 마무리되지 못하였기 때문이라고 추측되며 결국 아벨의 연구 결과가 출간된 것을 보게 된다.

이러한 연구가 발표되지 못하여 후세 사람들의 수학 연구에 영향을 끼치지는 못하였지만 가우스 자신이 복소수의 중요성을 인식하고 복소수 평면(가우스 평면)과 복소수 함수를 본격적으로 들여다보게 되는 계기가 되었다는 것만으로도 충분히 중요하다.

6.2.4 아벨과 야코비 [1, 2, 16]

아벨 (Niels Henrik Abel, 1802–1829) 은 노르웨이 수학자이다. 그는 시골 동네에서 목사의 아들로 태어나 고등학교를 다니던 중에 학교 선생님이 그의 천재성을 발굴해 대학에 진학하게 되었고, 1823 년 당시 그가 제안한 5 차방정식을 근호만으로 푸는 방법을 검증하기 위하여 코펜하겐으로 수학자 Degen을 만나러 가면서 그의 수학이 알려지게 되었다. 기록에 이 당시에 아벨은 타원함수의 역함수를 생각하고 있었음이 보인다. 대학 장학금으로 파리에 유학을 가게 된 아벨은 파리학사원에 자신의 논문을 제출하고 그 결과를 기다렸다. 이 논문이 인정받으면 출세의 길이 열릴 것을 확신하고 기다렸지만 파리학사원은 반응이 없었고 가난한 아벨은 오래 기다릴 여유가 없었다. 그는 기다리다 지쳐서 고향으로 돌아가는 길에 들른 독일에서 Crelle를 만났다. Crelle의 도움으로 그는 연구를 시작하였으며 그 결과를 Crelle의 논문지에 싣게 된다.

그는 맨 처음 lemniscate의 호의 등분 문제를 해결하여 자와 컴파스에 의한 작도로 원호를 n 등분 할 수 있는 n 과 lemniscate의 호를 n 등분 할 수 있는 n 은 똑같다는 사실을 알아냈다.[2] 그는 연구를 계속하여 1827 년에 타원함수에 대한 연구 결과를 얻었고 이것을 논문으로 써서 Crelle Journal에 게재하였다.[3] 그의 첫 논문은

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$$

에서 출발하였다. 여기서 c, e 는 실수이다. 그는 여게서 x 를 α 의 함수로 보아서 $x = \varphi(\alpha)$ 에 대하여 연구 하였다. 그 과정에서 두 개의 보조함수

$$f(\alpha) = \sqrt{1-c^2\varphi^2(\alpha)}, \quad F(\alpha) = \sqrt{1+e^2\varphi^2(\alpha)}$$

를 도입하였고 x 가 0 에서 $1/c$ 로 증가하는 동안 α 는 0 에서

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^{1/e} \frac{dt}{\sqrt{(1-c^2t^2)(1+e^2t^2)}}$$

로 증가함을 알아냈다. 이 함수 $\varphi(\alpha)$ 는 $\alpha \in [0, \omega/2]$ 에 대하여 single-valued로 잘 정의되는 함수였다. 그는 여기서 $x \rightsquigarrow -x$ 로 바꾸면 $\alpha \rightsquigarrow -\alpha$ 로 바뀌므로 $\varphi(\alpha) = -\varphi(\alpha)$ 라는 사실과, 또 $x \rightsquigarrow -xi$ 로 바꾸면

$$\alpha \rightsquigarrow \beta i, \quad \beta = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1+c^2t^2)(1-e^2t^2)}}$$

[2] 원호를 n 등분할 수 있는 n 을 모두 결정한 것은 가우스이다.

[3] 이 논문은 Recherches sur les fonctions elliptiques라는 제목으로 1828 년에 출간되었다.

로 바꾸므로

$$\beta \in \Big[-\frac{\omega'}{2}, \frac{\omega'}{2}\Big] \text{ 일 때, } xi = \varphi(\beta i), \quad \frac{\omega'}{2} = \int_0^{1/e} \frac{dt}{\sqrt{(1+c^2t^2)(1-e^2t^2)}}$$

라는 사실을 알아내고 φ에 대한 다음 가법정리를 증명하였다:

$$\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varphi(\alpha)f(\beta)F(\beta) + \varphi(\beta)f(\alpha)F(\alpha)}{R},$$
$$f(\alpha+\beta) = \frac{f(\alpha)f(\beta) - c^2\varphi(\alpha)\varphi(\beta)F(\alpha)F(\beta)}{R},$$
$$F(\alpha+\beta) = \frac{F(\alpha)F(\beta) + e^2\varphi(\alpha)\varphi(\beta)f(\alpha)f(\beta)}{R},$$
$$R = 1 + e^2c^2\varphi^2(\alpha)\varphi^2(\beta).$$

이 가법정리는 오일러나 르쟝드르 등도 이미 알고 있었다. 그러나 아벨의 증명은 매우 간단하고 쉽다. 증명하려는 가법정리의 우변을 r이라 놓으면 r은 α, β에 대하여 대칭이다. $\partial r/\partial\alpha$도 α, β에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha} = \frac{\partial r}{\partial \beta}$$

가 되고 따라서 r은 $\alpha+\beta$의 함수이다. 즉 $r = \psi(\alpha+\beta)$이다. 이제 $\beta = 0$를 대입하여 보면 $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$이므로 $r = \varphi(\alpha+\beta)$가 되어야 한다. f나 F도 마찬가지 방법을 사용하면 된다. 그는 이 공식으로부터

$$f\Big(\pm\frac{\omega}{2}\Big) = 0, \quad F\Big(\pm\frac{\omega'}{2}i\Big) = 0$$

를 사용하여 위의 세 함수의 변수가 실수값에서 순허수값을 가질 때로 확장하고 나아가서 복소수 변수로 확장하여 나갔다.

이러한 연구에서 아벨은 일반 삼각함수와 타원적분에서 나타나는 φ사이의 차이를 복소수의 관점에서 인지하였다. 즉 가법정리를 사용하여 $\varphi(n\alpha) = P_n/Q_n$으로 n배각 공식을 유리식으로 나타내는 과정에서 방정식 $\varphi(\alpha+i\beta) = 0$가 매우 많은 근을 가지게 되는 이유를 생각하게 되었다.[4] 예를 들어 삼각함수의 경우 $\sin u$에서부터 $\sin(u/3)$의 값을 구하려면 3배각의 공식으로부터 방정식 $4x^3 - 3x + \sin u = 0$을 풀어서 구하게 되며 이 근들은 각이 $u/3$, $(u+2\pi)/3$, $(u+4\pi)/3$이 되는 것이다. 그러나 φ의 경우에는 조금 다르다. $\varphi(u)$의 값으로부터 $\varphi(u/3)$를 구하려면 위의 가법정리를 쓰게 되며 이 때 풀어야 하는 방정식은 9차방정식이 된다. 아벨이 깨달은 것은 삼각함수의 경우에는 방정식의 근이 모두 실근이었던 반면에 타원함수의 경우에는 복소수 근이 나타나며

[4] 아벨은 P_n과 Q_n에 대한 점화식을 찾아내었다.

이 때의 각은

$$u_0 + m\frac{\omega}{3} + n\frac{\omega'}{3}i$$

꼴로 나타나게 된다는 것이다. 즉 이 함수들은 이중주기함수라는 것이다. 이러한 내용은 다항방정식에 대한 갈루아이론의 발전에도 큰 영향을 주었다.

아벨의 업적에서 가장 중요한 것은 초타원적분에 대한 이론이다. 당시에 타원적분에 대한 여러 성질을 알게 된 후에 일반적으로 $y^2 = P_k(x)$ $(k \geq 5)$ 꼴의 함수에 대하여 dx/y의 적분의 역함수, 즉 다음과 같은 적분의 역함수 $u = u(z)$를 계산해 내는 문제를 연구하고 있었다:

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{P_k(x)}}.$$

야코비는 이 문제에서 부분적인 성공을 거두기는 했지만 완전히 해결하려면 새로운 아이디어가 필요하다는 사실은 분명했다.

이 문제에서 아벨은 결정적인 한 걸음을 내디뎠다. 그는 x, y가 대수방정식 $f(x, y) = 0$를 만족시키고 $R(x, y)$는 유리함수일 때,

$$\int_0^{x_1} R(x, y)\, dx + \cdots + \int_0^{x_m} R(x, y)\, dx$$

과 같은 꼴로 주어진 m 개의 적분의 합은 m이 아무리 큰 자연수여도 항상 어떤 일정한 자연수 g개의 이런 꼴의 적분의 합과 그 밖에 유리함수, 로그함수 등을 써서 나타낼 수 있다는 것을 보였다. 이것을 아벨의 『가법정리』(addition theorem)이라 부른다. 여기서 g는 $f(x, y) = 0$의 (그래프의) 종수가 된다. 이러한 아벨의 업적이 어떤 의미를 갖는지는 후에 리만에 의해서 밝혀지게 된다.

1829년 1월에 병상에서 쓴 아벨의 논문 『어떤 초월함수의 일반적 성질에 대하여』는 Crelle 논문지에 투고되었다. 이 업적에 대하여 후일 Mittag Leffler는 다음과 같이 말하였다: 『1829년 1월 6일은 문화사에서 나랏님의 기념일보다도 더 기억하여야할 날이다. 이날 아벨은 병상에서 그의 생애에서 가장 훌륭한 생각을 Crelle지를 위하여 썼다. 이것은 아벨의 가법정리이고 그 당시에도 이미 Monumentum aere perennius[5]라고 불렸으며, 아벨 탄생 100주년인 오늘에도 여전히 수학 진보의 정점이었다고 생각한다.』

야코비(Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851)는 후에 독일이 된 프러시아의 포츠

[5] [직역] 청동보다도 오래가는 기념비. 『불멸의 작품』이라는 뜻. 이 어구를 사용하여 아벨을 칭찬한 것은 르쟝드르가 아벨 사후에 Crelle에 보낸 편지에서였다고 한다. (1832년 3월 24일자)

담의 유태인 가정에서 아벨보다 2년 늦게 태어났다. 일찌기 두각을 나타낸 야코비는 17세에 베를린 대학에 진학하여 언어학을 주로 공부하였으나 개인적으로 수학도 공부하였고, 2년 후에 수학을 전공으로 선택하여 21세에 박사학위를 받았다. 그는 괴팅겐 대학에서 교수로 재직하다 간강상 이유로 1843년에 그만두었으며, 건강을 회복하고 베를린에서 여생을 지냈다.

그가 처음 수학 논문을 실은 것은 아벨이 파리에서 긍정적인 반응을 얻지 못하고 베를린을 거쳐서 다시 고향인 크리스티아나로 돌아온 후인 1827년 9월호의 Astronomische Nachrichten (123호)이다. 야코비가 이 논문에서 증명한 것은 아벨이 그 동안 생각하고 있던 타원함수론의 이론을 사용하면 쉽게 증명되는 것이었지만, 아벨은 멀리 있어서 이 잡지를 본 것이 그 다음해 초였다. 그는 이 논문에서 타원함수의 역함수와 그의 이중주기성을 이용하였다. 이것은 아벨을 깜짝 놀라게 할만한 사건이었다.

베를린에 4개월 들린 동안 Crelle와의 친분을 쌓았던 아벨은 이 논문을 보기 전에 Crelle의 새 논문지에 타원함수론에 대한 논문『Recherches sur les fonctions elliptiques』를 게재하였지만 새로운 경쟁자 때문에 연구 중간에 논문 게재하기를 중지하고 연구에 몰두하였다. 그가 야코비를 의식하고 쓴 다음 논문은『타원함수의 변형에 관한 일반적인 문제의 해결』이라는 논문으로 같은 Astronomische Nachrichten의 138호에 1828년 6월에 게재된 것이다. 타카기 선생은 이 논문을『야코비 정복용 논문』이라고 불렀다. 그리고 야코비는 아벨의 연구 성과에 대하여 감동하였다고 전한다.

부유한 가정에서 재능을 가진 왕성한 활동가인 야코비에 대하여 빈곤한 시골의 병약하고 내성적 천재인 아벨은 매우 대조적인 상황에 놓여 있었으며, 르쟝드르가 아벨보다 야코비를 더 훌륭하다고 생각했던 것에 반하여 슈마커는 가우스에게 쓴 편지에서 아벨이 더 낫다고 추천하는 등, 당시는 젊은 아벨과 야코비에 대한 수학계의 관심이 뜨거웠던 것 같다.

앞에서 해설한 아벨의 논문들의 뒤를 잇는 후속 연구는 그의 병으로 인해 완성되지 못하여 계획중이었던 Recherches 제2편은 중지되었다. 그의 계획에 의하면 훨씬 큰 규모의 저작을 계획하고 있었던 듯하지만 결국 그의 사후 1829년에 그가 집필하였던 Précis d'une théorie des fonctions elliptiques가 미완성본으로 Crelle지에 실렸다.

한편 야코비의 논문 Notices는 앞에서 이야기한 때에 같은 Crelle에 실렸으며 후속논문인 Fundamenta nova는 1829년에 단행본으로 출간되었다. 그의 업적은 위에서 이야기한 것처럼 타원적분으로 정의되는 함수의 역함수를 구체적으로 생각한 것이며

특히 ϑ–함수 이론을 전개한 것이다.

야코비는 1832년 논문에서 아벨의 결과 일부를 인용하였다. (완벽한 결과인 파리 학사원 제출 논문은 아직 간행되기 전이었다.) 이것은

$$\int \frac{Q(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}, \quad \deg P > 4$$

꼴의 초타원적분에 대한 아벨의 정리에서는 대수적 항이나 로그 항이 나타나지 않는다는 것이다. 그는 이 정리를 다음가 같이 고쳐 나타냈다: 즉 $X = f(x)$가 차수 $2m$ 또는 $2m-1$인 다항함수라 하자. $k = 0, 1, \ldots, m-2$일 때 적분함수를

$$\int_0^x \frac{A - kx^k}{\sqrt{X}}\,dx = \Pi(x)$$

라고 나타내기로 하면, 변수 x에 대하여 m개의 값 $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$에 주어질 때 이들로부터 대수적으로 찾을 수 있는 또 다른 $m-1$개의 값 $a_1, a_2, \ldots, a_{m-2}$를 찾아서

$$\Pi(x_0) + \Pi(x_1) + \cdots + \Pi(x_{m-1}) = \Pi(a_0) + \Pi(a_1) + \cdots + \Pi(a_{m-2})$$

되도록 할 수 있다. 여기서 각 a_j는 $x_i = f(x_i)$와 $\sqrt{X_i}$들의 유리함수를 계수로 갖는 차수 $m-1$인 다항방정식의 해 꼴이다.

여기서 야코비는 두 개의 적분을 잡고 이 두 적분함수의 역함수를 동시에 계산하는 방법을 찾아나갔다. 즉,

$$X = (1-x^2)(1-k^2x^2)(1-m^2x^2)$$

이라 할 때 두 함수

$$\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Phi_1(z), \quad \int_0^z \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \Phi_2(z)$$

를 잡고 동시에 두 방정식

$$\Phi_1(z_1) + \Phi_1(z_2) = u_1, \quad \Phi_2(z_1) + \Phi_2(z_2) = u_2$$

을 연립으로 생각하였다. 여기서 야코비는 $u = \Phi_i(z)$를 z의 함수로 볼 것인가 아니면 그 역함수를 생각하여 z를 u의 함수로 볼것인가를 가지고 망설였지만 그는 위의 연립방정식에서 z_i를 u_i의 함수로 볼 수 있다는 것을 알아챘다. 이렇게 만들어진 새로운 함수 λ_1과 λ_2는 삼각함수나 타원함수와 여러 면에서 유사한 성질을 갖게 된다. 특히 이 함수들은 각 변수에 대하여 4중 주기함수가 된다.

그는 이 연구를 진척시켜서 이 함수들이 대수적 형태의 가법정리를 만족시키므로 이들 주기 사이에는 특별한 관계가 있고 서로 독립인 주기는 4개 뿐임을 알아내고 이를 1847년의 논문에 발표하였다. 결과적으로 그는 초타원적분 $\int dx/\sqrt{X}$ ($\deg X = 2m-1$ 또는 $2m$)에 대하여 $\int^{x_i} x^r dx/\sqrt{X}$ ($0 \le i \le m-1$) 꼴의 적분함수 m개의 합을 $m-1$

개 ($r = 0, \ldots, m-2$) 잡고 이것의 역함수를 구할 수 있고 이 $m-1$ 개의 변수에 대한 $m-1$ 개의 함수를 연구한다는 생각을 알아낸 것이다.

이러한 야코비의 연구 결과는 당시의 젊은 수학자들에게 전파되어 당장 에르미트(Hermite)가 뒤를 잇는 놀라운 업적을 내었고 또 Göpel이나 Rosenhain과 같은 학자들이 그 뒤를 이었다.

야코비는 이 과정에서 ϑ-함수를 연구하였다. 이미 잘 알려져 있는 함수였음에도 야코비를 통하여 이 함수가 타원함수와 밀접한 관계가 있다는 사실을 알게 되었다. 특히 이것은 관련된 연구를 하였던 아벨이나 푸리에는 알아채지 못했던 것이며 야코비는 이 함수가 특히 해석적 정수론에서 강력한 도구가 된다는 것을 알아냈다.

가우스에서 아벨을 거쳐 야코비에 이르는 타원함수론의 발전은 눈부신 것이었지만 일반적인 복소함수론의 뒷받침이 없던 시대였던 탓에 더이상의 발전은 보이지 못했다. 이것은 어쩔 수 없이 다음 세대에게 미루어질 수 밖에 없었다.

6.2.5 Eisenstein과 Kronecker

아이젠슈타인(Ferdinand Gotthold Max Eisenstein, 1823–1852)과 크로네커(Leopold Kronecker, 1823–1891)는 아벨과 야코비의 바로 뒤를 이으면서 타원함수에 중요한 가교 역할을 하였다. 아이젠슈타인은 29세의 나이로 요절하였지만 그의 연구 결과는 크로네커에게 커다란 영향을 주었다. 부유한 집안에서 태어난 크로네커는 아이젠슈타인과 같이 공부하였으나 학위 후에 가업을 잇기 위하여 고향으로 돌아왔다. 1855년에야 다시 공부를 시작하였으며 부유한 그는 교수직을 갖지 않고 지내며 학술원 회원까지 올라갔으며, 만년에 괴팅겐 대학의 교수가 되었다.

그의 연구는 대수학 분야에서 많은 업적을 내었으며 타원함수론에서는 아이젠슈타인의 영향을 많이 받았다고 한다. 이에 대한 자세한 사항은 수준 높은 수학/수학사 서적인 André Weil의 『Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker』[12]를 참조하면 좋다.

6.2.6 바이에르스트라스와 리만

이 두 사람의 역사와 에피소드는 많은 책에 언급되어 있다. 여기서는 간단히 위키피디아와 Monastyrsky의 잘 정리된 이야기 책 [8]을 참조하였다.

바이에르스트라스(Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815–1897)는 어려서 어머니를 여의었다. 세관에서 일하는 아버지는 그가 고등학교를 졸업하자 상업과 법률을

공부하라고 본 대학에 보냈지만 거기서 수학공부만 했다고 하며 덕분에 학교를 졸업하지 못했다. 당시 본 대학에는 플뤼커(Plücker, 1798–1852)가 있어서 그의 강의를 열심히 들었다. 본 대학을 떠나게 되자 친구와 집에서 추천으로 중학교 선생이 되기 위해서 다시 뮌스터 대학에 입학하여 검정고시를 준비하였다. 그런데 그 대학에는 타원함수를 연구하는 군데르만(Gundermann, 1798–1852)이 있었으며 바이에르스트라스에게 강한 영향을 끼쳤다. 그는 좋은 성적으로 교사임용시흠에 붙었고 그 때부터 15년 동안 중학교 선생님 일을 했다. 그는 그 동안에 아벨의 연구 결과를 철저하게 연구하였다. 그는 몇 편의 논문을 쓴 다음 39세인 1854년에 크렐레 논문지에 『아벨함수에의 기여』라는 제목의 논문을 발표하였다. 당시 수학자들은 그의 논문을 보고 고등학교 선생님이 쓴 논문이라고 믿지 못하였다.

1856년에 쿰머(Kummer, 1810–1893)은 바이에르스트라스를 베를린 대학으로 모셔왔다. 아벨처럼 그도 크렐레 덕분에 수학계에 나올 수 있었다. 베를린 대학에는 쿰머와 크로네커가 있었으며 그들에게 자극을 받아 40년 동안 수학을 연구했다.

그의 수학적 업적으로는 복소함수론을 도입하는 한 가지 방법을 정립했으며 해석학의 엄밀한 기초를 세운 것을 들 수 있다. 또 타원함수와 아벨함수의 이론, 변분학, 해석함수 등에 대하여 강의하였다. 그는 책을 저술하지 않았으며 대신 그의 새로운 생각을 강의에서 모두 이야기하여 그의 강의록은 역사적으로 매우 중요하다.

그는 해석학 분야에서 많은 새로운 사실을 밝히거나 제대로 세웠으며 여러 곳에 그의 이름이 남아있다. 타원함수 이론과 관련해서는 리만이 중요한 경계값문제를 디리클레 원리를 사용해서 풀었지만 그 풀이에 중대한 결함이 있음을 지적하였다. 그는 연구를 통해서 많은 중요한 결과를 발표했지만 유독 타원함수의 이론에서는 그의 연구 도중에 리만의 중요한 결과가 발표되게 되었고 그는 이 결과가 너무 새로운 아이디어를 바탕으로 한 것에 충격을 받게 되고 타원함수의 이론을 더이상 연구하지 않았다고 한다.

그러나 그의 업적과 강의가 유명해져서 유럽 여러 나라에서 학생들이 유학 왔다. 그 중에는 프랑스의 에르미트(Hermite), 스웨덴의 미타크레플러(Mittag-Leffler), 러시아의 코발레프스카야(Kowalevskaya) 등이 있다.

리만(Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866)은 아버지가 가난한 목사였다. 그로 인해서인지 그는 평생 허약하고 결핵으로 고생했다고 한다. 그러나 그는 당시의 수학을 완전히 바꾸어 놓고 지금까지도 수학자의 연구를 자극하는 많은 연구결과를

내었다. 어떻게 보면 그의 생각 하나 하나는 지금 수학의 한 분야씩을 만들어내었다고 해도 과언이 아니다.

그러나 리만의 학술적 업적은 그의 동료들은 물론, 중요한 대학 당국으로부터 냉담한 반응을 얻었다. 가우스는 1855년에 타계했고, 그의 뒤를 이은 것은 리만의 오랜 친구 디리클레(Dirichlet)였다. Dirichlet가 어렵게 노력해서 리만에게 보수를 조금 받는 자리를 학과 안에다 마련해 주었다. 1857년 11월이 되어서야 리만은 조교수직을 받았다. 리만은 디리클레와 공동연구한 기간(1855–1859) 동안 가장 훌륭한 연구 결과를 내었다. 아직은 그가 병으로 기운이 쇠하기 전이며, 그가 자신이 하고 싶은 연구에 매진할 수 있는 기회였다.

1857년에 "Theorie der Abelschen Functionen"이란 논문이 *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*의 54권에 실렸다. 이 논문에는 1851년부터 1856년까지 연구하고 1855–1856년의 강의들에서 자세하게 설명한 내용이 들어 있었다. 비록 이 강의들을 들은 사람은 3명에 불과했고 그 중의 한 사람은 디리클레였지만, 그의 사후에 데데킨트(Dedekind)와 베버(Weber)의 노력 덕분에 리만의 미발표 업적들이 발굴되고 그의 전집에 수록되었고, 이 덕분에 그의 위대한 재능이 수학자들에게 알려졌다. 아벨함수에 대한 리만의 연구 결과는 그의 박사 학위 논문을 발전시킨 것이다. 그의 매우 독창적이고 유익한 착상은 다가(多價)함수(예를 들면 $\sqrt{z}$)를 복소평면 전체를 정의역으로 사용하지 않고 이 함수의 특이점 정보로부터 정의되는 특별한 곡면(리만면)을 정의역으로 사용하면 1가함수로 나타낼 수 있다는 것이었다.

이러한 새로운 생각을 토대로 그는 아벨의 정리를 새로운 기반 위에서 다시 생각할 수 있도록 바꾸어 놓았다. 이 과정에서 그는 몇 가지 중요한 결과를 발견하였다. 그 중 하나는 리만의 부등식으로 유한개의 서로 다른 점에서의 order가, 주어진 각각의 자연수보다 작은 극점을 갖는 유리형함수로서 서로 선형독립인 것의 개수의 상한을 얻게 된 것이고 이것은 후에 그의 제자인 로크(Roch, 1839–1866)에 의해서 확장되어 현재의 리만–로크의 정리가 되었다. 한편 리만면의 구조의 연구에서 기본이 되는 변환은 쌍유리변환(birational transformation)이라 불리는 것인데 그는 이러한 변환의 모임이 이루는 공간의 차원을 알아내었다.

리만은 1857년 논문의 결과부분에서 종수 g인 곡면 위에서 정의된 아벨적분의 역함수 문제에 대한 일반해를 제시하였다. 바이에르스트라스는 아벨함수 이론에서 리만의 가장 큰 경쟁상대였는데 이 결과를 보고 큰 충격을 받았다. 이에 대하여 클라인은 다음과 같이 썼다:

> … 바이에르스트라스가 1857년에 Berlin Academy에 일반 아벨함수에 대한 그의 첫번째 연구결과를 제출하였을 때, 리만이 같은 분야에 대하여 쓴 논문이 크렐레 논문지 54권에 실렸다. 이 논문에는 예측하지 못했던 새로운 개념들이 너무 많아서, 바이에르스트라스는 그의 논문을 철회하였으며 사실상 더 이상 논문을 쓰지 않았다.[6]

바이에르스트라스가 초타원적분의 경우의 역함수 문제에 대하여 그 때 해답을 얻었었고 또 일반화된 타원함수에 대하여 가장 중요한 일련의 관계를 증명했다는 사실을 감안하면 이것은 매우 아까운 일이다. 여러해 동안 이 리만의 업적은 그의 가장 중요한 업적으로 받아들여졌으나 얼마 지나지 않아서 바이에르스트라스가 이 결과의 중요한 부분에서 부족한 부분이 있음을 지적하였으며, 이에 따라 리만의 중요한 결과는 위험에 빠지게 되었음은 앞에서 이야기하였다[7]

클라인은 바이에르스트라스의 비판에 대한 일반의 반응을 다음과 같이 묘사하였다:

> 대부분의 수학자들은 리만에게 등을 돌렸는데, … 리만은 전혀 다른 생각을 가지고 있었다. 그는 바이에르스트라스의 비판이 정확하고 정당하다는 것을 잘 이해하고 있었다. 바이에르스트라스가 내게 나중에 말해주었는데, 리만이 말하기를 『그가 디리클레 원리를 써서 설명한 이유는 이 원리가 그때 마침맞게 있었던 편리한 도구였기 때문일 뿐이고, 디리클레 원리가 맞건 틀리건 그의 존재정리는 틀리지 않았다』고 하였다는 것이다.[8]

바이에르스트라스 자신도 이 사실을 믿고 있었다. 그는 자기 학생인 슈바르츠(Hermann Schwarz, 1843–1921)에게 리만의 존재정리를 자세히 공부하고 다른 증명을 찾아보도록 하였다. 바이에르스트라스의 비판이 인쇄돼서 출판 된 직후인 1869년에 슈바르츠는 디리클레 원리에서 존재 부분을 변분 원리를 쓰지 않고 증명해냈다.

리만의 『실수』는 이 밖에 또 하나의 대단히 중요한 결과를 주었다. 즉 이 결과로

---

[6] Klein, *Development of Mathematics*, p. 264.

[7] 리만은 그의 박사학위 논문에서는 물론 특히 그의 『아벨함수론(*The Theory of Abelian Functions*)』에서 변분 이론–「Dirichlet 원리」–을 사용했다. 그는 이 원리를 써서 주어진 특이점을 가지는 증명에 필요한 함수의 존재를 주장하였다. 그러나 바이에르스트라스는 일반적인 경우에는, 이렇게 변분 원리를 사용해서 필요한 함수의 존재를 연역해 내는 것이 불가능함을 보였다. 따라서 리만의 증명에 더하여 이에 대한 증명이 따로 필요하게 되었다.

[8] 같은 책 p. 235.

대수기하를 전공하는 학자들이 리만의 정리, 특히 리만-로크의 정리를 완전히 대수적인 방법으로 증명하도록 자극을 주었다. 다음 절의 클렙슈는 「곡면의 종수」라는 어휘를 발명했는데 이쪽 방향으로 대단한 업적을 내었다. Paul Gordon(1837–1912), Max Noether(1844–1921)의 연구를 거쳐서 마침내 1899년에 David Hilbert(1862–1943)는 변분원리를 증명하는데 성공하였다. 19세기 수학사에서 엄밀한 증명을 하려는 노력을 통해서 이렇게 많은 결실을 얻은 예는 이 밖에는 거의 없다.

6.2.7 Clebsch

클렙슈(Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, 1833–1872)는 야코비 학파의 아래에서 공부한 후에 1860년대에 괴팅겐에서 리만의 자리를 물려받았다. 그는 이 때부터 리만의 이론을 공부했으며 자신의 공부 방향인 사영기하의 입장에서 이 이론을 정리하기 시작하였다. 그는 39세의 나이로 세상을 떠났지만 그 사이에 리만의 이론을 대수곡선 위에서 전개할 수 있다고 처음 알아보아 대수기하학으로의 전환을 시도했으며 이 과정에서 곡면의 종수(genus)라는 말을 처음 사용한 사람이다. 그는 아벨의 가법정리를 가교로하여 대수 곡선 위에 복소함수론을 도입할 수 있다고 생각했다. 이러한 그의 생각은 당시 다른 학파에서는 불가능하다고 생각했으나 결과적으로 20세기에 들어와 중요한 아이디어로 판명났다. 현대 대수기하학은 이러한 생각 위에서 대수곡선 즉 리만면인 타원곡선 위의 해석학과 기하학이라는 관점에서 타원함수론을 전개하는 것을 기본으로 하여 발전하였다.

6.2.8 Poincaré

포앙카레(Jules Henri Poincaré, 1854–1912)는 아마도 19세기에 개발된 수많은 새로운 개념들을 새로운 관점으로 해석해서 현대 수학을 만들어낸 사람이라고 생각된다. 그는 수학 전 분야를 연구한 마지막 세대이기도 하다. 그를 유명하게 만든 것은 소위 automorphic function을 발견한 것이다. 그는 이것을 Fuchsian function, Kleinian function 등으로 불렀다. 그는 이를 계기로 복소함수론을 깊이 연구하였으며 다변수 복소함수론의 초석을 놓았다고 평가된다.

그는 이 과정에서 당연히 타원함수의 이론에 깊이 빠졌으며 이를 다각도로 연구하였다. 복소함수론과 타원 곡선 위의 대수기하학을 연구하여 현대적 대수기하학을 발전시킨 것 외에도 그는 1901년에 이러한 타원곡선 위에 놓이는 유리점에 대한 논문을

발표하였다.[9]

이 논문은 유리수체 위에서의 대수기하학이라는 새로운 분야를 만들어 내었으며 이는 대수기하학과 정수론이 서로 상호작용하는 분야이다. 이 분야는 요즘 arithmetic geometry라고도 불린다. 그는 이 논문에서 유리곡선 $f(x,y)=0$ 위의 유리점을 찾는 디오판투스 방정식을 다루었다. 그는 이러한 문제가 쌍유리변환에 대하여 불변인 문제임을 간파하였고, 타원함수를 매개변수로 사용하여 나타낸 계산을 사용하여 타원곡선 위의 유리점들이 군 구조를 가짐을 처음 알아내었다. 이것이 지금 되풀이해서 공부하고 있는 타원곡선 위의 덧셈구조이다. 앞에서 알아보았듯이 포앙카레는 이 군이 유한개의 원소로 생성되었을 것이라고 추측하였고 이는 조금 후에 Mordell에 의해서 증명되고 Weil에 의해서 일반화되었다.[10]

포앙카레는 현대 수학과 물리학 전 분야에 걸쳐서 혁혁한 업적을 내었으며 현대 수학 발전을 이끌었다. 그는 특히 다른 모든 수학자가 알아보지 못하는 것들을 발굴해내기도 하였다. 예를 들면 리군의 이론의 중요성을 제대로 알아본 몇 안되는 수학자이며 E. Cartan이 유명해지기 전에 그의 논문들의 중요성을 알아본 거의 유일한 수학자이기도 하다.

6.3 타원함수와 타원곡선 이론의 개요 [3, 10]

6.3.1 타원적분의 시작에서 아벨정리까지

미적분 이론을 기하 문제에 적용하여 보면 다음과 같은 적분 계산을 자주 마주친다:

$$\int r(x,y(x))\,dx$$

여기서 $r(x,y)$는 유리함수이고 $y(x)$는 다항방정식 $f(x,y)=0$으로 정해지는 대수함수이다.

이러한 가장 간단한 예로서 $f(x,y)=x^2+y^2-1=0$에 대하여 생각해 보자. 이

[9] Poincaré, Henri, Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques, *J. Math. pures et appl.*, Série 5, t. 7 (1901), pp. 161–233.

[10] Mordell, L. J., On the rational solutions of the indeterminate equations of the third and fourth degree, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, Vol. 21 (1922) pp. 179–192.

Weil, André, Sur un théorème de Mordell, *Bull. Sc. Math.*, Série 2, t. 54 (1930), pp. 179–192.

관계식은 원을 나타내며 이의 호의 길이함수는

$$\text{arclengthfn} = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

이 된다. 원의 방정식에서 미분을 계산하면 $x\,dy + y\,dx = 0$이므로 원 위에서는

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{y}\right)^2}\,dx = \frac{dx}{y}$$

가 된다.

이러한 계산을 타원 $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ $(a > b)$ 위에서 생각하여 보자. $x = a\sin\theta$, $y = b\cos\theta$라 놓고 호의 길이를 계산하면

$$L = \int \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = \int \frac{a(1-k^2\sin^2\theta)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,\theta, \quad \left(k^2 = 1 - \frac{b^2}{z^2}\right)$$

이 된다. 여기서 다시 $x = \sin\theta$라 놓으면

$$L = a\int \frac{(1-k^2x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (k^2 \neq 1)$$

꼴이 된다. 원에서 계산해낸 적분을 삼각적분이라고 부르고 타원의 경우는 타원적분이라고 부른다.

이러한 적분의 계산은 18세기 후반에 시작하여 현대에 이르기까지 연구하지 않은 수학자가 없을 정도로 흥미롭고도 유명한 문제이며 이 문제로부터 현대 수학 전체가 파생되어 나왔다고 해도 좋을 정도로 중요한 문제이다. 이러한 연구 과정에서 가장 선구자적이고도 중요한 역할을 한 수학자 아벨의 이름을 따서 사람들은 $r\big(x, y(x)\big)dx$를 아벨미분(abelian differential)이라고 부르고 이의 적분

$$\int r(x, y(x))\,dx$$

를 아벨적분(abelian integral)이라 부른다. 이러한 아벨미분은 현대 수학에서 보면 적당한 리만면(대수곡선) 위의 『유리 1-형식』의 일종이다.[11]

이런 적분의 가장 쉬운 경우는 $r = r(x)$로 x의 유리함수인 경우이다. 이 적분은 부분분수분해를 사용하면

$$\int r(x)\,dx = R(x) + \sum_{\nu} a_\nu \cdot \log(x - x_\nu)$$

꼴로 계산해낼 수 있다. $R(x)$는 다시 유리함수이다.

변수가 늘면 다음과 같다. 미분형식

$$\omega = r_1(x_1, x_2)\,dx_1 + r_2(x_1, x_2)\,dx_2$$

[11] 여기에 아벨의 이름을 붙여준 것은 아벨의 연구결과를 흠모한 야코비였다고 한다.

의 적분을 생각하게 되는데 ω가 닫힌(closed) 형식인 경우에만 의미가 있다. 이 경우 적분 $\int \omega$는 적분하는 경로에는 "거의" 무관하게 시작점과 끝점에만 의존하는 값을 가지게 된다.[12]

따라서 적분 경로를 선분으로 잡아 $(x_1, x_2) = (t\xi, t)$ 꼴로 쓰게 되면 결국

$$\omega = \tilde{r}(t, \xi)\, dt$$

꼴로 나타내어지고 이 경우 적분값은 앞에서와 마찬가지로

$$\int \omega = \int \tilde{r}(t, \xi)\, dt = \tilde{R}(t, \xi) + \sum_{\nu} A_\nu \log\big(t - t_\nu(\xi)\big)$$

와 같이 계산할 수 있다. 이 때 A_ν는 이 특이점에서 이 적분의 residue이다.

이러한 적분 다음으로 가장 간단한 것은 곡선 $f(x, y) = y^2 - p(x) = 0$에 대한 적분

$$\int r\big(x, \sqrt{p(x)}\big)\, dx$$

이다. (이 때, 다항식 $p(x)$는 중근을 갖지 않는다.) 이것은 앞에서 본 바와 같이 $n = 1, 2$인 경우는 2차곡선 위의 적분이고 $n = 3, 4$인 경우는 타원적분이 된다. 여기서 $\deg p = n \geq 5$이면 초타원적분이라 불린다.

아벨의 정리가 의미하는 바는 타원적분에 대한 가법정리는 타원적분에만 국한된 현상이 아니라 초타원적분에서 일반적인 현상이라는 것이다. 다음 절에서는 아벨이 그의 정리를 어떤 식으로 증명했는가를 간략히 알아본다.

6.3.2 아벨의 정리 [3]

앞에서 르쟝드르의 업적을 소개할 때 나왔던 르쟝드르 적분의 가법정리는 $y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2x^2)$이라 할 때

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{y} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{y} = \int_0^{x_3} \frac{dx}{y},$$
$$x_3(1 - k^2x_1^2x_2^2) = x_1\sqrt{(1 - x_2^2)^2(1 - k^2x_2^2)} + x_2\sqrt{(1 - x_1^2)^2(1 - k^2x_1^2)}$$

이고 이것은 아벨의 시절에는 잘 알려져 있었다. 아벨은 이의 일반적인 경우를 대수적으로 생각했다. 즉 n차 대수방정식 $f(x, y) = 0$으로 주어진 곡선 C 위의 점 (x, y)에 대하여 (아벨 적분이라 불리는) 적분식

$$u(P) = \int_{P_0}^{P} \omega = \int_{P_0}^{P} r(x, y)\, dx \tag{6.5}$$

[12] 여기서 "거의"란 말을 쓴 것은 이 적분 경로가 특이점을 건너가는 경우에는 값이 달라지는 것이나 이와 유사한 일이 때때로 벌어지기 때문이다.

을 생각해 보자. 이 적분값은 피적분함수(아벨미분)의 분모 때문에 생기는 극점 에서의 residue 를 주기(period)라고 부르면 함수값 $u(P)$는 주기를 법으로 하여 잘 정의되는 값이다. (여기서 P는 극점이 아니다.)

이제 다항식 $\theta(x,y) = \theta(x,y;t_1,\cdots,t_n)$은 계수가 t의 유리식인 x, y의 m차 다항식이라고 하자. 각각의 $t=(t_1,\cdots,t_n)$에 대하여 $\theta=0$은 곡선 D_t를 정한다. 그리고 $\mathbb{C}^2$ 안에서 이 두 곡선 C와 D_t는 중복도를 감한하여 mn개의 교점을 갖는다.[13] 이 각각의 교점을 $P(t)$라 하고

$$D_t \cdot C = \sum P(t)$$

라고 나타내기로 한다. 또 $P(t)$의 좌표를 $(\xi,\eta)=(\xi(t),\eta(t))$라고 쓰기로 하자.

이제 적분식

$$u(t) = \sum u(P(t)) = \sum \int_{P_0}^{P(t)} r(x,y)\,dx \tag{6.6}$$

을 생각하자. 이것을 보통 아벨 적분 (6.5)의 아벨합(Abelian sum)이라 부른다. 그러면 다음 정리가 성립한다. 이는 아벨 적분에 대한 첫 번째 정리이다. 이것을 아벨의 『초등가법정리』(elementary addition theorem)라고도 부른다. 이 정리를 일반화한 형태가 앞에서 소개한 아벨의 『가법정리』이다.[14]

정리 6.3.1 (아벨의 정리) 위의 아벨합 $u(t)$를 계산하면 다음과 같은 꼴로 나타낼 수 있다:

$$u(t) = R(t) + \sum_{\nu} \log S_\nu(t).$$

여기서 $R(t)$와 $S_\nu(t)$는 t의 유리함수이다.

[증명] 우선 각 x에 대하여 $\theta(x,y)=0$인 y들을 $y_1(x),\ldots,y_n(x)$로 나타내기로 한다. 즉 $\theta(x,y_k(x))=0$이다. 그리고 t에 대한 total differential은 δ를 써서 나타내기로 한다. 여기서 우리 목표는 $\delta u(t)$가 t에 대한 유리식 계수를 갖는 1-형식임을 보이면 된다.

[13] 이것이 유명한 Bézout의 정리이다.

[14] 여기서는 최근에 ICM 2014에서 Chern 상을 받은 Griffiths 교수님의 해설을 따라서 아벨의 정리와 그 증명을 본다. Griffiths 교수님은 이 증명이 Abel의 증명을 그대로 옮겨 놓은 것이라고 해설하고 있다.

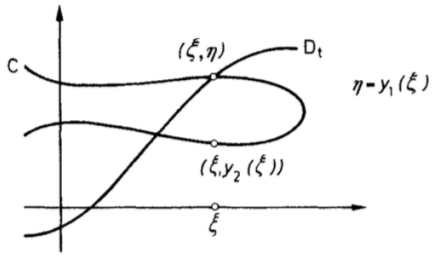
적분식 $u(t)$를 미분하면 다음을 얻는다.

$$\delta u(t) = \sum r(\xi, \eta)\, \delta\xi \tag{6.7}$$

여기서 우변의 합은 $D_t \cdot C$에 속하는 ξ를 따라서 합한 것이다. 이제 $\delta\xi$를 계산하여 보자.

$$\Theta(x) = \theta(x, y_1(x)) \cdots \theta(x, y_n(x))$$

라 정의하면 $\Theta(x) = 0$의 해가 $D_t \cdots C$의 점들의 x-좌표 ξ이다. 따라서 모든 t에 대하여 $\Theta(\xi) \equiv 0$가 성립한다.



따라서 이 식을 미분하면

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x}(\xi)\, \delta\xi + \delta\Theta(x;t)\Big|_{x=\xi} = 0$$

이 된다. 여기서 좌변의 마지막항을 $\delta\Theta(\xi)$라고 간단히 나타내기로 한다. 여기서 $\delta\xi$를 구해서 (6.7)에 대입하면 다음을 얻는다:

$$\delta u = -\sum \frac{r(\xi, \eta)\, \delta\Theta(\xi)}{(\partial\Theta/\partial x)(\xi)}.$$

이제 일반적으로 두 곡선 D_t와 C의 교점의 x좌표는 모두 서로 다르다고 가정하자. $\delta\Theta(\xi)$를 계산하여 보면

$$\begin{aligned}\delta\Theta(\xi) &= \sum_\nu \frac{\prod_k \theta(x, y_k(x))}{\theta(x, y_\nu(x))}\Big|_{x=\xi} \cdot \delta\theta(\xi, y_\nu(\xi)) \\ &= \sum_\nu \left[\frac{\prod_k \theta(x, y_k(\xi))}{\theta(x, y_\nu(x))}\Big|_{x=\xi} \cdot \sum_i \frac{\partial\theta}{\partial t_i}(\xi, y_\nu(\xi))\, \delta t_i\right]\end{aligned}$$

이 된다. 따라서 $-(\xi, \eta)\delta\Theta(\xi)$는 t의 유리함수임을 알 수 있다.

이 과정을 실제로 계산에 쓰기 편하게 조금 바꾼 것을 보자. 우리의 아벨 미분은 주어진 (초)타원 곡선이 $f(x, y) = y^2 - P(x) = 0$이라고 할 때

$$\frac{dx}{2y} = \frac{dx}{(y^2)_y} = \frac{dx}{f_y}$$

라고 쓸 수 있다. 그래서 일반적으로 $\omega = p(x,y)dx/f_y(x,y)$ 라는 아벨미분에 대하여 계산하면 편리하다. 이제 타원적분 계산에 맞게 D_t 는 1차함수

$$\theta(x,y) = y - t_1 x - t_2$$

로 정의된 직선들이라고 하자. 교점의 좌표를 $(\xi(t), \eta(t))$ 라 하면, $f(\xi(t_1,t_2), t_1\xi(t_1,t_2)+t_2) = 0$ 이 성립하므로, $F(x) = f(x, t_1x + t_2)$ 라 부르기로 하면, 간단한 미분 계산을 통해서 다음 식을 얻는다.

$$F'(\xi)\xi_{t_1} + \xi f_y = 0,$$
$$F'(\xi)\xi_{t_2} + f_y = 0.$$

앞의 계산과 마찬가지로 계산하고 $P(x) = p(\xi, t_1\xi + t_2)$ 라 부르기로 하면

$$u_{t_1} = \sum \frac{p(\xi,\eta)\xi_{t_1}}{f_y(\xi,\eta)} = -\sum \frac{\xi P(\xi)}{F'(\xi)}$$
$$u_{t_2} = \sum \frac{p(\xi,\eta)\xi_{t_2}}{f_y(\xi,\eta)} = -\sum \frac{P(\xi)}{F'(\xi)}$$

이다. 이 식들은 각각 $xP(x)/F(x)\,dx$ 와 $P(x)/F(x)\,dx$ 의 각 극점에서의 residue의 합이므로 이 총합은 무한대에서의 residue로 표현 된다. 따라서 이 두 값은 손쉽게 계산할 수 있다.

> [문제] 이 계산 방법을 써서 $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ 으로 주어지는 단위원에 대하여 직선과의 두 교점의 좌표가 만족시키는 관계식을 구하여라.
> (힌트: 아벨적분을 똑같이 $u(t) = \int^{(x_1,y_1)} \omega + \int^{(x_2,y_2)} \omega$ 라 하고 위의 직선 $\theta = 0$ 이 이 두 점을 지난다고 하고 위를 따라 계산해서 다음을 보인다:
>
> $$u(t) = -2\arctan t_1 = \arcsin \frac{-2t_1}{1+t_1^2}, \quad \frac{-2t_1}{1+t_1^2} = x_1y_2 + x_2y_1.)$$

6.3.3 바이에르스트라스의 타원함수 [6, 14]

타원함수론은 매우 큰 분야이다. 이 이론은 19세기에 가장 빛나는 결과들을 이뤘고, 이 이론이 생기고 나서 지금까지 이것을 연구하지 않은 학자가 없다고 할 정도로 수학의 중심을 이루고 있는 것이다. 요즈음에는 대수기하학과 대수적 수론에서 중심적 역할을 하고 있다. 여기서는 바이에르스트라스가 도입한 타원함수의 급수표현과 주요 공식을 소개한다.

복소평면 $\mathbb{C}$ 위의 격자점들이 서로 독립인 두 복소수 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 를 써서 $\{n_1\omega_1 + n_2\omega_2\}$ 로 만들어진다고 하자. (여기서 n_1, n_2 은 정수이다.) 이 격자점의 집합을 Λ 라 부르기로

하면 이에 의하여 이산군

$$\Gamma = \{\gamma : \gamma(z) = z + \lambda \text{ for some } \lambda \in \Lambda\}$$

를 정의할 수 있다. 바이에르스트라스의 함수는 다음과 같이 정의한다[15]:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \gamma \in \Gamma} \left(\frac{1}{\gamma(z)^2} - \frac{1}{\gamma(0)^2} \right).$$

이제 Λ가 1과 τ로 생성되었다고 하고, 원환면 $\mathbb{C}/\Lambda$를 생각하자. $\mathbb{C}/\Lambda$ 위의 유리형함수의 공간을 $\mathcal{M}$이라 할 때 $\wp \in \mathcal{M}$이고 이 함수는 단 하나의 극점 0을 갖는다. 만일 $\wp$를 $\mathbb{C}$ 위의 함수라고 보면 이 함수는 주기성

$$\wp(z) = \wp(1 + z) = \wp(z + \tau)$$

를 가지므로 쌍주기함수(*doubly periodic function*)라고 부른다. 원점 근방에서 로랑(Laurent)급수 전개를 하면

$$\wp(z) = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots$$

가 된다. 이 함수는 $\mathbb{C}/\Lambda$ 위에서 보면 0에서만 극점을 가지고 있고, 원환면 위의 유리형함수의 residue의 합은 0이 되므로 따라서

$$0 = \sum_p \mathrm{Res}_p(\wp\, dz) = a_{-1}$$

이 된다. $\wp$를 적당한 상수로 나누고 적당한 상수만큼 더하면 다음 꼴로 써진다:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots.$$

따라서 $\wp(z) - \wp(-z)$는 원점 근처의 극점이 상쇄돼 없어지므로 entire 함수이고 당연히 유계이다. 따라서 리우비유(Liouville) 정리에 따라 상수함수이다. 원점에서의 값이 0이므로 $\wp(z) - \wp(-z) \equiv 0$이다. 따라서 $n = 0, 1, 2, 3 \cdots$에 대해 $a_{2n+1} = 0$이다. 즉 $\wp$는 우함수이고 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots + a_{2n} z^{2n} + \cdots.$$

여기서

$$\begin{aligned}
\wp'(z) &= \frac{-2}{z^3} + 2a_2 z + 4a_4 z^3 + \cdots, \\
\big(\wp'(z)\big)^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{8a_2}{z^2} - 16a_4 + \cdots, \\
\big(\wp(z)\big)^3 &= \frac{1}{z^6} + \frac{3a_2}{z^2} + 3a_4 + \cdots
\end{aligned}$$

[15] 이러한 함수를 정의할 수 있었던 데는 이보다 먼저 아이젠스타인이 소개한 급수 $G_k = \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} 1/\omega^k$가 매우 중요한 역할을 했다.

를 얻는다. 이제 함수 $(\wp')^2 - 4\wp^3 + 20a_2\wp + 28a_4$를 생각하면 이 함수는 z의 음수 지수항을 가지고 있지 않고 0에서의 값이 0이므로 상수함수 0이 된다. 즉 이 함수들은 다음 관계식을 만족시킨다[16]:

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \quad (g_2 = 20a_2,\ g_3 = 28a_4) \tag{6.8}$$

이 관계식은 $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$에 $x = \wp$, $y = \wp'$을 넣은 것과 같으므로 타원곡선 $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$의 두 변수 (x, y)는 바이에르스트라스의 타원함수 $\wp$와 그 미분 $\wp'$으로 매개화할 수 있다.

복소평면 위에서 타원함수 $\wp(u)$의 주기격자점으로 만들어지는 주기평행사변형에서 정의된 함수 $\Phi(u) = (\wp(u), \wp'(u))$를 생각하자. $\wp$, $\wp'$은 이 영역에서 주기적이므로 그 상인 타원곡선은 $\mathbb{C}^2$ 안에 놓이는 윤환면(torus)가 된다. 쉽게 Φ는 1–1이고 onto임을 알 수 있다. 이때 Φ가 양쪽 영역 위에서의 군 구조에 대하여 homomorphism임을 보일 수 있다. 여기서 정의역의 군구조는 $\mathbb{C}$의 덧셈에 대한 군이고, 치역의 군구조는 타원곡선 위에서 직선과의 교점 작도를 통해 앞에서 정의된 군구조이다.

함수 $\varphi(u)$에 대하여 3변수 다항식 $F(x, y, z)$가 0 다항식이 아닌 것으로서, 항등적으로 $F\big(\varphi(u_1 + u_2), \varphi(u_1), \varphi(u_2)\big) = 0$가 성립하면 $\varphi(u)$가 『대수적 가법성』을 갖는다고 말한다. 예를 들어 지수함수나 삼각함수는 대수적 가법성을 가지고 있다. 여기서는 $\wp(u)$가 대수적 가법성을 가지고 있음을 알아본다.

함수

$$f(u) = \wp'(u) - a\wp(u) - b$$

를 생각하자 여기서 a, b는 고정된 복소수 u_1, u_2에 대하여 $f(u_1) = f(u_2) = 0$이 되도록 정한 상수이다. 간단히 하기 위하여

$$\wp(u_j) = P_j, \quad \wp'(u_j) = P_j' \quad (j = 1, 2)$$

라고 놓기로 하면

$$aP_1 + b = P_1', \quad aP_2 + b = P_2'$$

가 성립한다. 함수 $f(u)$는 $u = 0$에서 order 3인 극점을 가지므로 주기평행사변형 안에서 3개의 0점을 가져야 한다. u_1, u_2는 이중 두 개의 0점이므로 또 다른 하나의 0

[16] 이제 $\wp$나 $\wp'$을 마치 수 처럼 생각하여 $\wp$의 유리식을 모두 모으면 체를 이룬다. 이것을 $\mathbb{C}(\wp)$라 부르자. 이것들은 모두 z의 우함수들의 모임이므로 기함수인 $\wp'$은 여기 들어있지 않다. 하지만 위의 관계식에 의해 $(\wp')^2$은 이 체에 속하므로 $\wp'$을 첨가한 $\mathbb{C}(\wp, \wp')$은 $\mathbb{C}(\wp)$의 2차확대체이다.

점을 u_3 라 하자. 그러면 다음과 같은 사실을 알 수 있다:[17]

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \qquad \bmod \Lambda.$$

따라서 $f(u)$ 의 영점은 u_1, u_2, $-(u_1+u_2)$ 이 된다. 여기서 $\wp(u_1+u_2) = P_3$, $\wp'(u_1+u_2) = P_3'$ 라 놓으면 $\wp'(u)$ 가 기함수이므로

$$aP_3 + b = -P_3'$$

를 만족시킨다. $\wp$ 가 미분방정식 (6.8) 만족시키므로 P_i 와 P_i' 도 이 방정식을 만족시키게 되고, 따라서 $x = P_1, P_2, P_3$ 은 방정식

$$4x^3 - g_2 x - g_3 - (ax+b)^2 = 0 \tag{6.9}$$

의 해가 된다. 여기서 P_1, P_2, P_3 가 서로 다른 값을 갖도록 u_1, u_2 를 잡으면 방정식 (6.9)의 해는 P_1, P_2, P_3 뿐이다. 근과 계수의 관계를 사용하면

$$P_1 + P_2 + P_3 = \frac{a^2}{4},$$

$$P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1 = -\frac{ab}{2} - \frac{g_2}{4},$$

$$P_1P_2P_3 = \frac{b^2}{4} + \frac{g_3}{4}$$

을 얻고 여기서

$$a = \frac{P_1' - P_2'}{P_1 - P_2}, \quad b = \frac{P_1P_2' - P_2P_1'}{P_1 - P_2}$$

가 얻어진다. 근과 계수의 첫 번째 관계식에서 다음을 얻는다.

$$\wp(u_1+u_2) = -\wp(u_1) - \wp(u_2) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u_1) - \wp'(u_2)}{\wp(u_1) - \wp(u_2)}\right)^2 \tag{6.10}$$

이것이 『바이에르스트라스 $\wp$–함수의 가법정리(addition formula)』이다.

6.3.4 리만의 리만면 [8]

수학에 대 변혁을 가져다주고 해석학의 바탕에 기하학이 있음을 처음 보여준 리만의 리만면(*Riemann surfaces*)을 이해하기 위하여 다음 두 가지 간단한 경우에 대하여 리만면을 먼저 구성하여 보기로 하자:

$$w = \sqrt{z}; \tag{6.11}$$

$$w = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}. \tag{6.12}$$

[17] 이 사실은 복소함수론의 적분계산을 통해서 확인할 수 있는데 여기서는 간단히 하기 위하여 뒤에 소개하는 참고서에서 찾아보기로 하자.

1) 함수 $w = \sqrt{z}$의 리만면.[18]

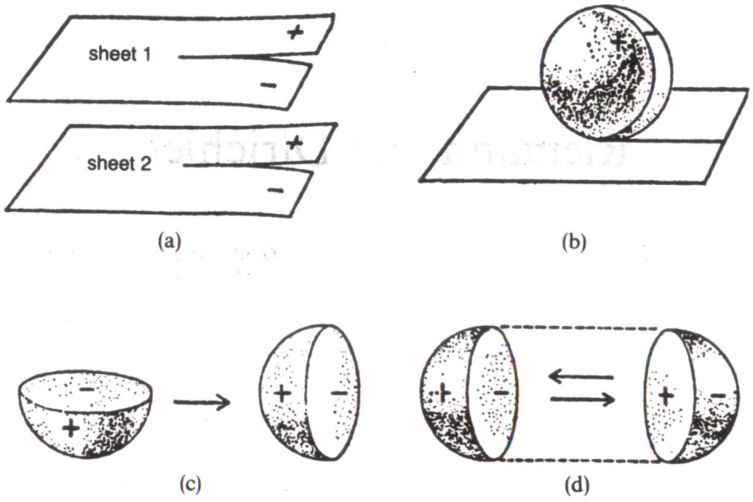


그림 1

한 점 $z_0 = re^{i\phi}$를 잡으면 $w = \sqrt{r}e^{i\phi/2}$이다. 좌표계의 원점 주위로 닫힌 곡선을 따라 한 바퀴 돌면 ($\tilde{\phi} = \phi + 2\pi$), 함수 w는 부호가 바뀐다: $w = \sqrt{r}e^{i(\phi+2\pi)/2} = -\sqrt{r}e^{i\phi/2}$. 따라서 (우리는 한 바퀴 돌아서 이 점으로 되돌아갔으므로) 같은 점 $z_0 = re^{i\phi}$에 대하여 w가 서로 다른 두 개의 값을 갖게 된다. 즉 이 함수는 2가함수이다. 이런 어려움을 피해가기 위해서 복소평면을 양의 실수축을 따라서 잘라낸다. 함수 $w(z)$의 정의역을 이 잘린선(절단, cut)과 만나지 않는 한도 까지만 보면 $w(z)$는 다음과 같이 두 개의 1가함수로 이루어진 분지(分枝, branch)로 이루어진다:

$$w(z) = \sqrt{r}e^{i\phi/2}, \quad 0 \le \phi < 2\pi\text{일 때},$$
$$w(z) = -\sqrt{r}e^{i\phi/2}, \quad 2\pi \le \phi < 4\pi\text{일 때}.$$

이제 이렇게 잘린 두 개의 복소평면을 보자(그림 1, sheet 1과 2). 그러면 각각의 잘린 부분은 두 개의 변을 이룬다: 즉 제1사분면쪽 변과 제4사분면쪽 변이다. (여기서 잘린 선으로 인하여 평면이 갈라져 떨어져 있다고 생각한다.) 그림과 같이 제1사분면 쪽을 $+$ 기호로 나타내고 제4사분면 쪽을 $-$ 기호로 나타내기로 하자. 이 cut를 가로질러서 분지 $w(z)$를 연결하기 위하여 서로 이어 붙이는 두 변에서의 함수값의 sign이 같아야

[18] 복소함수론에서 $\sqrt{z}$는 다음 식으로 정의한다: $z = r\exp[i\theta]$라 할 때,

$$\sqrt{r\exp[i\theta]} = z^{1/2} = \exp\left[(1/2)\log z\right] = \exp\left[(1/2)(\log r + i\theta)\right] = \sqrt{r}\exp[i\theta/2].$$

따라서 이 함수는 원점에서의 거리를 조금 바꾸는 외에 기본적으로 원점에서 잰 $\overrightarrow{0z}$와 x-축의 양의 방향과 각도(θ)를 반으로 줄인다.

한다.

이제 두 sheet를 붙이자: 즉, sheet 1의 $+$쪽 변과 sheet 2의 $-$쪽 변을 붙이고, sheet 1의 $-$쪽 변과 sheet 2의 $+$쪽 변을 붙인다. 이 절단을 가로질러 가는 길을 따라가면 우리는 다른 sheet로 넘어가게 된다. 따라서 다음과 같은 놀라운 상황이 된다: sheet 1 위의 점 z_0에서 출발하여 닫힌 곡선을 따라 좌표계의 원점을 한 바퀴 돌게 되면 sheet 2로 건너서서 점 z_0에 오게 되면 함수값 w는 $-\sqrt{z_0}$가 되게 된다. 따라서 각각의 sheet 위에서는 함수 w는 한가지 값만을 가지게 된다.

Riemann의 착상은 기본적으로 다음과 같다: 복소평면 위의 다가함수는 이 함수에 맞는 여러 sheet로 이루어진 리만면 위에서 1가함수라고 생각할 수 있다. 불행하게도 교차점을 만들지 않으면서 이렇게 붙이는 것은 3차원 공간 안에서는 할 수가 없다. 하지만 이렇게 만든 리만면은 위상적으로는 구면과 동치라는 사실을 알 수 있다.[19]

2) 더 복잡한 함수의 리만면: $w = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}$.

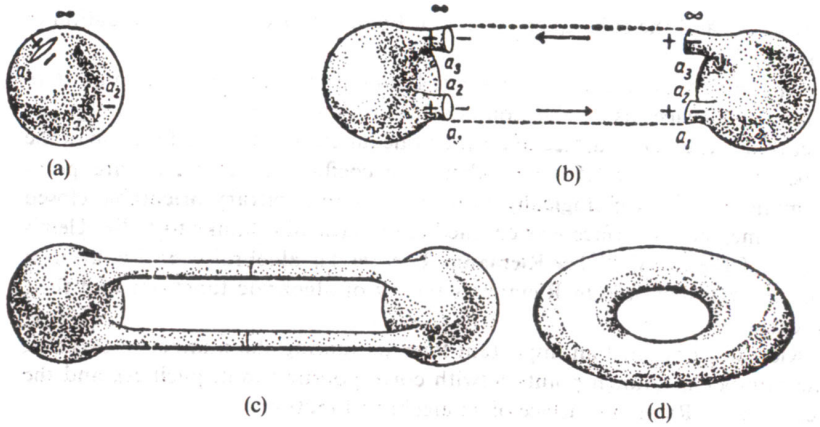


그림 2

구면 위에서 a_1부터 a_2까지 절단하고 또 a_3에서 무한대까지 절단하자(그림 2a). 이 절단을 벌려서(그림 2b) 변의 sign을 맞추어서 똑같은 두벌을 붙인다(그림 2c). 이 곡면은 위상적으로 원환면(torus)(그림 2d), 즉 위상적으로 동형인 「구면에 handle

[19] 실제로 Stereographic projection의 도움을 받아서 위의 각 sheet는 구면 속에 대응시켜 넣을 수 있다. (이를 Riemann sphere라고 부른다.) 그러면 이 평면(sheet 1) 위의 절단은 구면 위에서는 경선을 따라서 절단한 것과 같다(그림 1b). 이제 절단의 두 변을 움직여서 열어서 이것을 반구면(hemisphere)로 만들자 (그림 1c). Sheet 2도 마찬가지로 변형하여 이 두 반구면을 붙이면서 함수값의 sign에 주의하면 그림 1d와 같이 완전한 구면을 얻는다. 원래의 두 sheet의 절단에서 서로 대응되는 변을 붙여도 같은 결과를 얻는다. 이런 조작은 위상적으로 동치이므로 함수 $w(z)$의 리만면은 구면과 위상동형임을 알 수 있다.

하나를 붙인 것」이 된다. 일반적으로 함수 $w = \sqrt{(z-a_1)\cdots(z-a_{2g})}$의 리만면은 구면에 $g-1$개의 handle을 붙인 것과 같다. 여기서 $g-1$이란 숫자는 중요한 위상불변량인 곡면의 종수(種數, genus)이다. 두 곡면의 종수가 서로 다르면 이 두 곡면은 위상동형이 될 수 없다. 리만은 그의 구성이 위상적 성질임을 분명히 알고 있었다. 그의 연구 결과와 이에 따라 이루어진 Poincaré의 결과들은 위상기하학의 기초가 되었다.

리만은 그 sheet의 개수 n과 (중복을 고려하여 센) 분지점(branch point)의 개수 b를 이어주는 중요한 공식을 발견하였고, 대수함수의 리만면의 종수는 다음으로 주어진다:

$$g = \frac{b}{2} - n + 1. \tag{6.13}$$

이 공식은 초타원곡면(hyperelliptic surface) $w = \sqrt{(z-a_1)\cdots(z-a_{2g+2})}$의 종수가 g가 된다는 것을 보여준다. (이 때 sheet의 개수는 $n=2$이고 분지점 $a_1,\ldots,a_{2g+2}$는 모두 중복도 1이다.) 모든 향을 줄 수 있는 닫힌 곡면은 구면에 적당한 개수의 handle을 붙인 곡면과 연속이 되도록 1대1대응을 시킬 수 있다. 따라서 임의의 향을 줄 수 있는 곡면은 어떤 대수함수의 리만면임을 알 수 있다. 리만면을 사용하면 대수함수와 그 적분론인 아벨적분을 공부하는데 이익이 많다.

앞에서와 같이 $r(x,y)$는 유리함수이고 두 변수 x와 y는 대수함수 f에 의해서 주어진 관계식 $f(x,y)=0$를 만족시킨다고 하자. 아벨의 정리에서 유한한 m 개의 적분들의 합

$$\int_{x_0,y_0}^{x_1,y_1} r(x,y)\,dx + \cdots + \int_{x_0,y_0}^{x_m,y_m} r(x,y)\,dx$$

은 항상 단 g개의 이러한 적분 및 몇 개의 유리함수와 로그함수를 써서 나타낼 수 있다고 할때, g는 주어진 대수함수 f의 종수로서 m과는 무관하게 결정된다. $f(x,y) = y^2 - P_k(x)$일 때인 초타원적분에 대하여 이 대수함수의 종수는 이미 알고 있는 리만면의 종수이다.

리만이 본 아벨의 정리의 핵심 내용은, 임의의 대수함수의 적분인 아벨적분론을 공부하려면 (적분 속에 나타나는 특이점에 따라 정해지는) 몇 개의 특수한 경우만 공부하면 된다는 것이며, 그 합의 계산에서 종수에 따른 적분 외에 유리항이나 로그항이 0이 되는 경우를 구별해낼 수도 있다.

따라서 일반적인 경우의 역함수 문제는 임의의 리만면 위에서 정의된 다가함수에 대하여 연구하지 않으면 안 된다는 사실을 알 수 있다. 그리고 아벨은 일반적인 경우의

역함수 문제를 제기하지 않았다. 이 문제를 풀게 된 영광은 리만에게 돌아갔다. 그는 리만면 위에 정의된 다가 해석함수의 일반 이론을 구성해서 연구를 진행했다. 그의 방법론의 기본은 이미 그의 박사학위 논문에 들어있었다. 그는 먼저 적절한 절단을 잡아나가면 다중연결인 영역을 단순연결인 영역으로 바꿀 수 있음을 보였다. 그 다음에는, 함수의 작용 방식을 잘 정의하고 절단을 가로지르는 곡선이 주어지면, 이 문제가 주어진 형태의 특이점을 갖는 1가함수를 연구하는 문제로 바뀐다는 사실을 보였다.

리만은 특히 주어진 꼴의 특이점을 갖는 다가함수의 존재 여부는 그 리만면의 위상에 따라 결정된다는 사실을 보이는데 성공하였다. 예를 들어 다음과 같은 아벨적분을 생각해 보자:

$$w = \int_0^z R(u, z)\, dz. \tag{6.14}$$

여기서 다음과 같은 문제를 물어볼 수 있다: 『주어진 리만면 위에 정의된 아벨함수로서 무한대로 가까이 가지 않고 상수함수도 아닌 그런 것이 존재하는가?』[20]

Riemann은 유한개의 점에서 무한대 값을 갖는 아벨함수에 대하여 이와 유사한 문제를 풀었다. 예를 들면 제2종 아벨미분의 존재 문제, 즉 국소적으로 다음과 같은 꼴을 갖는 미분형식의 존재 문제이다:

$$\left(\frac{a_k}{z^k} + \cdots + \frac{a_2}{z^2} + \phi(z)\right) dz = f(z)\, dz$$

여기서 $\phi(z)$는 holomorphic 함수이다. 이 문제에서 이런 제2종 아벨미분이 $dg(z)$ 꼴이 되도록 하는 유리형함수 $g(z)$가 완전히 임의로 주어진 극점(pole)들을 가지도록 할 수는 없다. (Liouville 정리로부터 $g(z)$는 적어도 한 개의 극점을 가져야 한다는 것을 알 수 있다.)

이 문제에 대해 리만은 매우 중요한 결과인 리만 부등식을 발견하였다. 이는 m개의 서로 다른 점 P_k $(k = 1, \ldots, m)$에서 order $r \le n_k$인 극점들을 갖는 meromorphic 함수로서 서로 선형독립인 것의 개수가 $\sum n_k - g + 1$보다 적지 않다는 것이다. (여기서 g는 곡면의 종수genus이다.)

1864년에 Riemann의 학생인 Gustav Roch는 이보다 더 강력한 결과를 증명하는데

[20] 이런 함수는 꼭 다가함수여야 한다는 사실이 Joseph Liouville의 정리로부터 나온다. 이 정리는, 닫힌 리만면 위에서 정의된 임의의 1가 해석함수가 (0이나 극(pole)과 같은) 특이점을 갖지 않으면 상수함수라는 것이다. Riemann은 다음과 같은 결과를 얻었다: 종수가 g인 곡면 위에는 선형독립인 제1종적분이 g개 존재한다. (예를 들면, 이 결과로부터 구면 위에는 정칙인 아벨함수가 존재하지 않는다는 것을 알 수 있다.)

성공했다. (Roch(1839–1866)는 이른 나이에 세상을 떠났다.) 이에 의하면 다음이 성립한다:

$$r = \sum n_k - g + 1.$$

이것이 바로 유명한 Riemann-Roch 정리이다. 현재는 Riemann-Roch 정리를 다차원으로 확장한 여러 개의 정리가 있고 이는 대수기하학이나 해석학, 위상기하학 등에서 중요한 역할을 한다.

Riemann이 아벨함수를 연구하면서 얻은 또 다른 발견은 리만면의 세부 구조와 연관되어 있다. 지금 까지 여러 번 강조한 것은 Riemann의 연구에 위상기하의 뒷받침이 있다는 것이지만, 이 발견의 결과로 곡면의 위상을 보존하여서 종수도 유지하는 변환이지만 서로 다른 함수를 가져다주는 변환이 커다란 집합을 이룬다는 것을 알 수 있었다. 이것이 쌍유리변환(birational transformation)이다.

이제 다음 곡면을 생각하자:

$$f(w, z) = 0. \tag{6.15}$$

만일 $w_1 = R_1(w, z)$와 $z_1 = R_2(w, z)$가 유리함수이고, 또 이의 역변환도 똑같이 유리함수로 주어진다면, 함수 $f(w, z)$로부터 새로운 함수 $F(w_1, z_1)$을 얻을 수 있다. 이렇게 연관된 두 곡면 $f(w, z) = 0$과 $F(w_1, z_1) = 0$은 쌍유리동치(birationally equivalent)라고 부른다. 두 곡면이 쌍유리동치일 필요조건의 하나는 두 곡면의 종수가 일치하는 것이지만, 이 조건만으로는 충분조건이 되기에는 많이 부족하다.

결과적으로 종수 $g > 1$인 리만면 가운데서 서로 쌍유리동치가 아닌 것은 $(3g - 3)$ 차원의 모임을 이루게 된다. $g = 1$인 리만면의 모임은 1차원 집합을 이루지만, $g = 0$(구면)이면 쌍유리 불변량은 하나도 없다. 다시 대수방정식으로 돌아가 보면, 다음 결과를 얻는다: (6.15)와 같은 꼴의 대수방정식으로 종수가 g인 것들은 $3g - 3$개의 복소 매개변수를 써서 분류된다는 사실이 알려져 있다. 이 매개변수들을 그 「리만면 또는 대수곡선의 moduli」라고 부른다.[21]

참고문헌

[1] Bottazzini, Umberto and Jeremy John Gray, *Hidden Harmony: Geometric Fantasies*, Springer, 2013.

[21] 이 숫자는 리만곡면 중에 서로 공형적으로 다른 것의 갯수와 같다는 것도 알려져 있다. 즉 공형적으로 동치가 아닌 리만면의 모임의 moduli 공간의 차원도 $3g - 3$이 된다.

[2] Cooke, Roger, Abel's theorem, in Rowe, David E and McCleary, John (Ed.), *Ideas and Their Reception: Proceedings of the Symposium on the History of Modern Mathematics, Vol. 1, Vassar College, Poughkeepsie, New York, June 20-24, 1989*, (1989) 389–421.

[3] Griffiths, Phillip, Variations on a theorem of Abel, *Inventiones mathematicae* 35(1) (1976), 321–390, Springer.

[4] Griffiths, Phillip, *Introduction to algebraic curves*, American Mathematical Soc., 1989.

[5] Gunning, R., *Lectures on Riemann Surfaces*, Mathematical Notes, Princeton University Press, 1966.

[6] Hurwitz, A. and R. Courant, *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Springer Verlag, 1964.

[7] Klein, Felix (한경혜 옮김), *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19: Jahrhundert.*: 19세기 수학의 발전에 대한 강의, Chelsea, 나남, 1926, 2012.

[8] Monastyrsky, Michael I, *Riemann, topology, and physics*, Springer Science & Business Media, 2009.

[9] Shafarevich, Igor′Rostislavovich and Kurt Augustus Hirsch, *Basic algebraic geometry 2: Appendix—Historical Sketch*, Springer, 1977, 1994.

[10] Siegel, Carl Ludwig, *Topics in Complex Function Theory, Abelian Functions and Modular Functions of Several Variables*, John Wiley & Sons, 1989.

[11] Silverman, Joseph H. and John T. Tate, *Rational points on elliptic curves*, Springer, 2013.

[12] Weil, André, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer, 2012.

[13] Zagier, Don, L-series of elliptic curves, the Birch–Swinnerton-Dyer conjecture, and the class number problem of Gauss, *Notices Amer. Math. Soc.* 31(7) (1984) , 739–743.

[14] Wu, H. H. (伍鸿熙), 緊黎曼曲面引論, 출판사미상, 연도미상.

[15] 岩澤健吉, 代數函數論, 岩波書店, 1951.

[16] 高木貞治, 近代數學史談 3版, 共立出版, 1931, 1970(3版).

Lecture notes : 16th KIAS Geometry Winter School

Hyun Kyu Kim (email: hyunkyukim@ewha.ac.kr)

title: Basics on Teichmüller spaces of Riemann surfaces
date: 2021.Jan.19

---

references (공부하기 좋은 책들):

Farb-Margalit, *A primer on mapping class groups*
Hubbard, *Teichmüller theory*

목표 (to understand) :

Riemann (1857) said : "a curve of genus $g \geq 2$ depends on $3g-3$ moduli"

(curve는 Riemann surface를 의미. moduli는 (complex) parameter)

Let S = topological 2-manifold

Today : S compact of genus g, oriented.
We fix any smooth structure on S.

Def. A **holomorphic structure** (or **complex-analytic structure** or **complex structure**) on S is a maximal holomorphic atlas Σ on S.

(즉 $\Sigma = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$, where $\{U_i\}_{i\in I}$ is an open cover of S, $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{C}$ diffeomorphism to an open subset of $\mathbb{C}$, and each transition map $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ is (bi)holomorphic)

$\to (S, \Sigma)$ is called a **Riemann surface** of topological type S.

Def. Riemann's classical **moduli space**

$$\mathcal{M}(S) := \{\text{holomorphic structures } \Sigma \text{ on } S\}/\mathrm{Diff}^+(S)$$

where the quotient means quotient by the action of pullback by orientation-preserving diffeomorphisms $S \to S$.

(cf. {Riemann surfaces of topological type S}/isomorphism)
(cf. $\mathcal{M}_g$)

want :
• parametrize all points of $\mathcal{M}(S)$ by parameters?
• structures on $\mathcal{M}(S)$? topologize? manifold?

왜 하나?
• 결과론 (해보니 좋더라)
• to quantize (하나씩만 다룰 수는 없고, 모아놓은 공간(위의 함수)을 다뤄야 된다)

어쨌든, $\mathcal{M}(S)$를 공부하려면, better idea to study:

Def. **Teichmüller space**

$$\mathcal{T}(S) = \{\text{holomorphic structures } \Sigma \text{ on } S\}/\mathrm{Diff}(S)_0$$

where the quotient is quotient by the action of pullback by diffeomorphisms $S \to S$ isotopic to identity.

Note: people write $\mathcal{T}(S) = \{\text{holomorphic structures } \Sigma \text{ on } S\}/\text{isotopy}$

We will see partially:

Thm (Fenchel-Nielsen $\sim$ 1948) *If $g \geq 2$, $\mathcal{T}(S)$ is homeomorphic to $\mathbb{R}^{6g-6}$.*

(we will see how the number $6g-6$ comes up)

We will not see:

Thm. $\exists$(Weil-Petersson) *Kähler metric on $\mathcal{T}(S)$.*

Relationship with $\mathcal{M}(S)$?

Def. **Mapping class group**

$$\mathrm{MCG}(S) := \mathrm{Diff}^+(S)/\mathrm{Diff}(S)_0$$

(discrete group of components of $\mathrm{Diff}^+(S)$)

Note: $\mathrm{MCG}(S)$ acts 'nicely' on $\mathcal{T}(S)$, and $\mathcal{T}(S)/\mathrm{MCG}(S)$ is homeomorphic to $\mathcal{M}(S)$
(so $\mathcal{T}(S)$ is a universal cover of $\mathcal{M}(S)$)

Let's study $\mathcal{T}(S)$. People say

$$\mathcal{T}(S) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{hyperbolic metrics on } S\}/\text{isotopy}$$

(where a hyperbolic metric is a Riemannian metric with constant sectional curvature -1) holds due to the 'Uniformization Theorem'.

Thm (the **Uniformization Theorem**; Koebe, Poincaré, 1907) *A simply-connected Riemann surface is isomorphic (i.e. biholomorphic) to exactly one of $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{H}^2$.*

Here $\mathbb{P}^1$ is the Riemann sphere (can be viewed as $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, and is homeomorphic to S^2), and $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ is the upper half-plane. Note $\mathbb{H}^2$ is naturally a Riemann surface,

whose holomorphic structure naturally inherits from that of $\mathbb{C}$ because $\mathbb{H}^2$ is an open subset of $\mathbb{C}$. Note that both $\mathbb{C}$ and $\mathbb{H}^2$ can be viewed as open submanifolds of $\mathbb{P}^1$.

Let's use the Uniformization Theorem.

Start from a Riemann surface (S, Σ) of topological type S (i.e. $[\Sigma] \in \mathcal{T}(S)$).

Let $p : \widetilde{S} \to S$ be a universal covering.

Claim. $\exists!$ *holomorphic structure* $\widetilde{\Sigma}$ *on* $\widetilde{S}$ *s.t.* $p : (\widetilde{S}, \widetilde{\Sigma}) \to (S, \Sigma)$ *is a local biholomorphism.*

Then $(\widetilde{S}, \widetilde{\Sigma})$ is a simply-connected Riemann surface, so by the Uniformization Theorem, $\exists$isomorphism

$$\Phi : (\widetilde{S}, \widetilde{\Sigma}) \to X$$

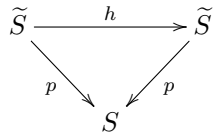
of Riemann surfaces, where

$$X \in \{\mathbb{C}, \mathbb{P}^1, \mathbb{H}^2\}.$$

How do we get the original (S, Σ) back? Quotient by the **deck transformation group**

$$\mathrm{Aut}(p) := \{h : \widetilde{S} \to \widetilde{S} \text{ homeomorphism s.t. } p = ph\}$$

(i.e. self-homeomorphisms h of $\widetilde{S}$ that preserve the covering p, i.e. h making the diagram



to commute)

Facts from 대수위상:
(1) $\mathrm{Aut}(p) \cong \pi_1(S)$
(2) $\mathrm{Aut}(p)$ acts properly discontinuously (and freely) on $\widetilde{S}$
(3) $\widetilde{S}/\mathrm{Aut}(p)$ is homeomorphic to S

Note : Consider the automorphism group of the Riemann surface $(\widetilde{S}, \widetilde{\Sigma})$:

$$\mathrm{Aut}(\widetilde{S}, \widetilde{\Sigma}) = \{h : \widetilde{S} \to \widetilde{S} \text{ homeomorphisms preserving } \widetilde{\Sigma}\}$$

(you may replace 'homeomorphisms' by 'diffeomorphisms'). Then the subgroups $\mathrm{Aut}(p)$ and $\mathrm{Aut}(\widetilde{S}, \widetilde{\Sigma})$ of $\mathrm{Homeo}(\widetilde{S})$ satisfy

$$\mathrm{Aut}(p) \leq \mathrm{Aut}(\widetilde{S}, \widetilde{\Sigma})$$

(by construction of $\widetilde{\Sigma}$)

Note : From the isomorphism $\Phi : (\widetilde{S}, \widetilde{\Sigma}) \to X$ of Riemann surfaces, we get the isomorphism

$$\mathrm{Ad}_\Phi : \mathrm{Aut}(\widetilde{S}, \widetilde{\Sigma}) \to \mathrm{Aut}(X), \quad h \mapsto \Phi \circ h \circ \Phi^{-1}$$

of the isomorphism groups.
(consider the diagram

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{S}, \widetilde{\Sigma}) & \xrightarrow{\Phi} & X \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \vdots \\ (\widetilde{S}, \widetilde{\Sigma}) & \xrightarrow{\Phi} & X \end{array}$$

)

summary (for a fixed $x \in S$)

$$\pi_1(S, x) \cong \mathrm{Aut}(p) \leq \mathrm{Aut}(\widetilde{S}, \widetilde{\Sigma}) \underset{\cong}{\xrightarrow{\mathrm{Ad}_\Phi}} \mathrm{Aut}(X)$$

Thm.
(1) The resulting homomorphism

$$\rho = \rho_\Sigma : \pi_1(S, x) \to \mathrm{Aut}(X),$$

called the **monodromy representation** *(or* **holonomy representation***) of Σ, is well-defined up to conjugation by an element of* $\mathrm{Aut}(X)$.

(2) $\rho_\Sigma = \rho_{\Sigma'} \Leftrightarrow \Sigma, \Sigma'$ represent a same point of $\mathcal{T}(\Sigma)$.

(3) ρ is faithful (i.e. injective) and (the image is) discrete.

Question: $\mathrm{Aut}(X)$는 어떻게 생겼나?

Thm.
(1) $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm \mathrm{Id}\}$*, for each* $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ *(i.e.* $a, b, c, d \in \mathbb{C}$*,* $ad - bc = 1$*), the associated automorphism* $f_\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ *of* $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *is* $f_\sigma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$*)*

(2) $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \cong \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \mid a \neq 0\}$ *(so* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *given by* $f(z) = az + b$*)*

(3) $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}^2) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$

Thm. *Suppose that a Riemann surface Y is not isomorphic to $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, or a Riemann surface of genus 1 (i.e. homeomorphic to the torus $S^1 \times S^1$). Then Y has $\mathbb{H}^2$ as its universal covering Riemann surface.*

Thm. *For $g \geq 2$,*

$$\mathcal{T}(S) \to \mathrm{Hom}^{df}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))/\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$$

sending $[\Sigma]$ *to* $[\rho_\Sigma]$ *is a bijection.*

Here, the right-hand-side is the set of all group homomorphisms $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ defined up to conjugation by an element of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ such that ρ is faithful and (the image of ρ is) discrete.

Can we see $\dim \mathcal{T}(S)$? ($\mathcal{T}(S)$ locally homeomorphic to $\mathbb{R}^N$, for which N?)

$\pi_1(S)$ has a presentation by $2g$ generators and 1 relation. Note that $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ is a real 3-manifold. So, at least locally,

$$\dim \mathcal{T}(S) = (2g-1)\cdot 3 - 3,$$

where -3 comes from the quotient action by the 3-manifold Lie group $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. So

$$\dim \mathcal{T}(S) = 6g - 6.$$

What we didn't see today : the hyperbolic metric description of $\mathcal{T}(S)$. We will see next time a little bit (how a Riemann surface structure Σ on S induce a hyperbolic metric on S)

Lecture notes : 16th KIAS Geometry Winter School

Hyun Kyu Kim (email: hyunkyukim@ewha.ac.kr)

title: Teichmüller spaces as cluster varieties
date: 2021.Jan.25

---

1 Continuing from last time : compact surfaces

Let S be a compact oriented surface. The **Teichmüller space** is

$$\mathcal{T}(S) := \{\text{holomorphic structures } \Sigma \text{ on } S\}/\text{isotopy}$$

which is in bijection with

$$\text{Hom}^{df}(\pi_1(S), \text{PSL}(2,\mathbb{R}))/\text{PSL}(2,\mathbb{R}),$$

the set of all group homomorphisms $\rho : \pi_1(S) \to \text{PSL}(2,\mathbb{R})$, defined up to conjugation by an element of $\text{PSL}(2,\mathbb{R})$ (i.e. two homomorphisms $\rho, \rho' : \pi_1(S) \to \text{PSL}(2,\mathbb{R})$ are viewed as equivalent if $\exists \sigma \in \text{PSL}(2,\mathbb{R})$, $\forall [\gamma] \in \pi_1(S)$, $\rho'([\gamma]) = \sigma\, \rho([\gamma])\, \sigma^{-1}$; to be more precise, pick a point x of S and replace $\pi_1(S)$ by $\pi_1(S,x)$), such that ρ has discrete image in $\text{PSL}(2,\mathbb{R})$ and ρ is faithful (i.e. injective).

For a point $[\Sigma]$ of $\mathcal{T}(S)$ represented by the holomorphic structure Σ on S, let $[\rho] = [\rho_\Sigma]$ be the corresponding point of $\text{Hom}^{df}(\pi_1(S), \text{PSL}(2,\mathbb{R}))/\text{PSL}(2,\mathbb{R})$ represented by the monodromy representation homomorphism

$$\rho : \pi_1(S) \to \text{PSL}(2,\mathbb{R}).$$

Let

$$\Gamma := \rho(\pi_1(S)) \leq \text{PSL}(2,\mathbb{R})$$

be the corresponding **Fuchsian group** (this just means a discrete subgroup of $\text{PSL}(2,\mathbb{R})$). We have the commutative diagram of maps

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{S}, \widetilde{\Sigma}) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathbb{H}^2, \Sigma_{\mathbb{H}^2}) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{quotient}} \\ (S, \Sigma) & \overset{\phi}{\dashrightarrow} & \mathbb{H}^2/\Gamma \end{array}$$

for a unique map $\phi : (S,\Sigma) \to \mathbb{H}^2/\Gamma$, which is an isomorphism of Riemann surfaces, hence in particular a diffeomorphism from S to $\mathbb{H}^2/\Gamma$.

Note that $\mathbb{H}^2 = \{x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \,|\, y > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$ has a standard *hyperbolic metric* $g_{\mathbb{H}^2} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ (a hyperbolic metric means a Riemannian metric with sectional curvature$\equiv 1$; since we are dealing only with surfaces here, one can replace the 'sectional curvature' by the 'Gaussian curvature'). The automorphism group of this Riemannian manifold $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}^2})$ is:

Thm. *The orientation-preserving isometry group*

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}^2}) := \{h : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2 \text{ } \textit{orientation-preserving diffeomorphisms preserving } g_{\mathbb{H}^2}\}$$

(here, h preserving $g_{\mathbb{H}^2}$ means $h^* g_{\mathbb{H}^2} = g_{\mathbb{H}^2}$) coincides with the group $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \leq \mathrm{Homeo}(\mathbb{H}^2)$ *of* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ *fractional linear transformations.*

Hence

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}^2}) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{H}^2, \Sigma_{\mathbb{H}^2}).$$

(preserving lengths and angles, i.e. being an isometry
$\leftrightarrow$preserving angles, i.e. being conformal
$\leftrightarrow$preserving complex structures, i.e. being holomorphic)

So $\Gamma \leq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ is a discrete subgroup of $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}^2})$, hence the quotient $\mathbb{H}^2/\Gamma$ inherits the hyperbolic metric. We can then pullback this hyperbolic metric along the diffeomorphism $\phi : S \to \mathbb{H}^2/\Gamma$, to obtain a hyperbolic metric $g_{[\Sigma]}$ on S.

Thm. *This hyperbolic metric $g_{[\Sigma]}$ on S is well-defined by $[\Sigma] \in \mathcal{T}(S)$, up to isotopy, and this assignment $[\Sigma] \mapsto g_{[\Sigma]}$ yields a bijection*

$$\mathcal{T}(S) \to \{\textit{hyperbolic metrics on } S\}/\textit{isotopy}$$

Some authors just define the Teichmüller space this way, i.e. as the space of all isotopy classes of hyperbolic metrics on S.

2 Teichmüller spaces for non-compact surfaces

This time, let S be a *non-compact* oriented topological 2-manifold. We assume S is of *finite type*, i.e. S is obtained from a compact oriented surface of genus g by removing n points, where the removed points are called the **punctures**. We require

$$n \geq 1, \qquad \chi(S) = 2 - 2g - n < 0.$$

Pick any smooth structure on S, so we may view S as a smooth oriented surface.

Def. *The* **Teichmüller space** *of S is defined as*

$$\mathcal{T}(S) = \{\textit{complete hyperbolic metrics } g \textit{ on } S\}/\textit{isotopy}$$

Here a hyperbolic metric g on S being *complete* means that, when S is viewed as a metric space with the metric defined from the lengths of paths with respect to g (distance between two points of S being the length of the shortest piecewise smooth path), S is a complex metric space. And modding out by isotopy means modding out by pullbacks by self-diffeomorphisms of S isotopic to the identify diffeomorphism.

It turns out that the above version $\mathcal{T}(S)$ is not so nice for our purpose.

For other versions to consider, we need to investigate the boundary behaviors of the hyperbolic metrics g on S, i.e. the asymptotic behavior near the punctures. It is convenient to describe such a behavior in terms of monodromy. First, we need:

Thm. *The assignment to each hyperbolic metric on S its monodromy representation yields the bijection*

$$\mathcal{T}(S) \leftrightarrow \mathrm{Hom}^{df;S}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))/\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}),$$

where the right hand side is the set of all group homomorphisms $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, defined up to conjugation, such that ρ has discrete image, ρ is faithful, and ρ is of 'type S', i.e. $\mathbb{H}^2/\rho(\pi_1(S))$ is homeomorphic to S.

From now on, a point of $\mathcal{T}(S)$ may be denoted by $[g]$ (isotopy class of a hyperbolic metric).

Def. *A non-identity element A of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ is called*

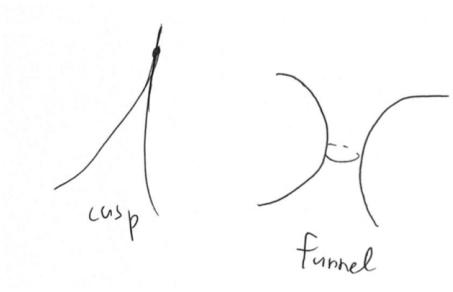
- **parabolic** *if* $|\mathrm{tr}(A)| = 2$*;*
- **hyperbolic** *if* $|\mathrm{tr}(A)| > 2$*;*
- **elliptic** *if* $|\mathrm{tr}A| < 2$

(each is similar to $\pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $(a \neq 0)$, $\pm \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ $(\lambda > 0)$, $\pm \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ $(\theta \in \mathbb{R})$)

Note. *For $[\rho] \in \mathcal{T}(S)$, the value $\rho([\gamma])$ is never elliptic.*

Def. *Let p be a puncture of S. (so p is not really a point of S) Let γ_p be a small simple loop in S surrounding p. Let $[g] \in \mathcal{T}(S)$, and let $[\rho]$ be the corresponding conjugacy class of monodromy representation homomorphisms $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.*

- *p is a* **cusp** *with respect to $[g]$ if $\rho([\gamma_p])$ is parabolic;*
- *p is a* **funnel** *with respect to $[g]$ if $\rho([\gamma_p])$ is hyperbolic.*



(cusp와 funnel 참조: 제 15회 고등과학원 기하학 겨울학교, 김영주 교수 강연 "쌍곡기하 산책")

Def. *Define the* **cusped (or, punctured) Teichmüller space** *as*

$$\mathcal{T}^u(S) := \{[g] \in \mathcal{T}(S) \mid \textit{all punctures of } S \textit{ are cusps with respect to } [\rho]\}$$

and the **enhanced (or, holed) Teichmüller space** *as*

$$\mathcal{T}^+(S) := \left\{ [g, O] \;\middle|\; \begin{array}{l} [g] \in \mathcal{T}(S),\ O \textit{ is a choice of orientation} \in \{+,-\} \\ \textit{per each funnel of } S \textit{ with respect to } [g] \end{array} \right\}$$

(I think u stands for 'unipotent')

The data O can be thought of as follows. For a funnel puncture p of S, there is a unique geodesic in the homotopy class of the loop γ_p around p. The data O is a choice of an orientation of this geodesic, per each funnel puncture p.

FACT. *The enhanced Teichmüller space $\mathcal{T}^+(S)$ is a smooth manifold diffeomorphic to*

$$\mathcal{T}^+(S) \approx \mathbb{R}^{6g-6+3n},$$

and is equipped with a Poisson structure called the Weil-Petersson Poisson structure. The cusped Teichmüller space $\mathcal{T}^u(S)$, viewed as a subspace of $\mathcal{T}^+(S)$, is a symplectic leaf with respect to this Poisson structure. Moreover, $\mathcal{T}^u(S)$ is diffeomorphic to

$$\mathcal{T}^u(S) \approx \mathbb{R}^{6g-6+2n},$$

possesses a Kähler structure compatible with the Weil-Petersson symplectic form, and can be viewed as a universal cover of Riemann's classical moduli space $\mathcal{M}_{g,n}$.

One of the goals of today's lecture is to partially understand the above FACT.

To start with, how do we investigate $\mathcal{T}^+(S)$? Say we do not know anything about the above FACT yet. We should first topologize the set $\mathcal{T}^+(S)$, and try to show that it is locally or globally homeomorphic to some $\mathbb{R}^N$. That is, we should find some charts, and maybe check

if the charts we found are smoothly compatible with each other. One way to topologize the set $\mathcal{T}^+(S)$ is to use the model $\mathrm{Hom}^{df;S}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))/\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. First, since $\pi_1(S)$ is a free group (why?), the set $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ can be identified with the product of bunch of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. As each $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ is naturally a topological space, one can topologize $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ as $(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))^M$ for some M. Then $\mathrm{Hom}^{df;S}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ can be given the subspace topology, and finally $\mathrm{Hom}^{df;S}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))/\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ the quotient topology. But we will not do it this way.

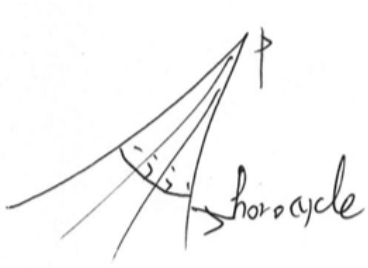
Instead, just viewing $\mathcal{T}^+(S)$ as a set, we will start finding charts for this set right away, without giving it a topology first. Then you can use '(smooth) manifold chart lemma' in the end (see Lee's book *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed., for example).

In fact, due to lack of time, we choose not to do this task for $\mathcal{T}^+(S)$ today, but only for the following yet another version of a Teichmüller space.

Def. *Define the* **decorated Teichmüller space** *as*

$$\mathcal{T}^d(S) := \{[g,h] \,|\, [g] \in \mathcal{T}^u(S),\ h \textit{ is a choice of a horocycle at each puncture}\}$$

Here, a **horocycle** at a (cusp) puncture p with respect to a hyperbolic metric g on S means a (smooth) curve in S that is perpendicular to all geodesics with respect to g emanating from p. It can be viewed as a circle centered at ∞.



So we have the following diagram of maps between different version of Teichmüller spaces

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^d(S) & & \mathcal{T}^+(S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T}^u(S) & \hookrightarrow & \mathcal{T}(S) \end{array}$$

where the vertical maps are maps forgetting decoration and orientation, respectively. The left vertical map $\mathcal{T}^d(S) \to \mathcal{T}^u(S)$ is a fiber bundle with fiber diffeomorphic to $\mathbb{R}^n$, and the right vertical map $\mathcal{T}^+(S) \to \mathcal{T}(S)$ is a 2^n-to-1 branched covering. Note that the bottom right $\mathcal{T}(S)$ is the naive definition of the Teichmüller space, while the bottom left $\mathcal{T}^u(S)$ is the most 'nice'

version, which had been classically studied (called $\mathcal{T}_{g,n}$, which is a universal cover of $\mathcal{M}_{g,n}$). One reason why people considered the upper versions $\mathcal{T}^d(S)$ and $\mathcal{T}^+(S)$ (in 1980's and on) is to obtain nice sets of coordinate systems, suitable for the quantization problem. However, even without the quantization, these special coordinate systems turned out to be providing prototypical examples of more general phenomenon, namely those of *cluster $\mathcal{A}$-varieties* (or cluster K_2-varieties) and *cluster $\mathscr{X}$-varieties* (or cluster Poisson varieties) which arose in the 21st century.

3 Coordinate system for the decorated Teichmüller space $\mathcal{T}^u(S)$

So, let us study coordinate systems for the various versions of Teichmüller spaces.

The original plan (for the last lecture) was to also review the Fenchel-Nielsen coordinate systems for $\mathcal{T}(S)$ (and $\mathcal{T}^u(S)$), which is most classical (early 20c), and based on a choice of an extra data called a *pants (or trouser) decomposition* of S. But let's not do it.. These coordinate systems turned out to be not suitable for the task of quantization.

The new sets of coordinate systems which arose in 1980's require the choice of the following data :

Def. *An* **ideal arc** *in S is an unoriented simple path running between (not necessarily distinct) punctures. An isotopy of ideal arcs means an isotopy (i.e. homotopy) within the class of ideal arcs.*

An **ideal triangulation** *T of S is a collection of ideal arcs in S such that*

(1) *no arc of T bounds a disk;*

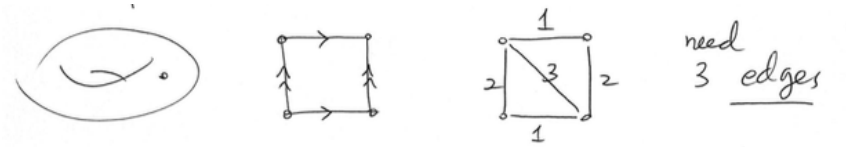
(2) *no two members are isotopic or intersect in S;*

(3) *the collection T is maximal among the collections satisfying (1)–(2).*

Note: T divides S into *ideal triangles*

Note: We often consider T only up to (simultaneous) isotopy.

e.g. once-punctured torus



e.g. 3-punctured sphere



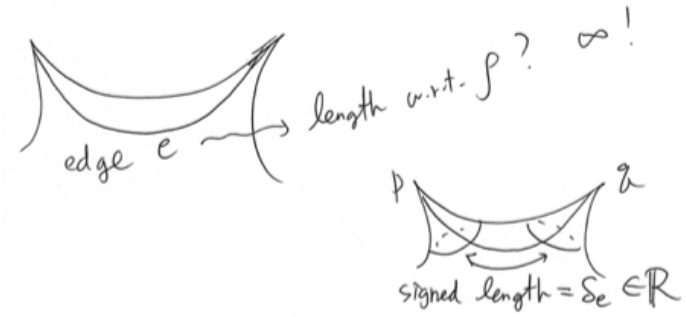
Note: T has $6g - 6 + 3n$ constituent arcs. (exercise)

Let's now describe a coordinate system for the decorated Teichmüller space $\mathcal{T}^d(S)$.

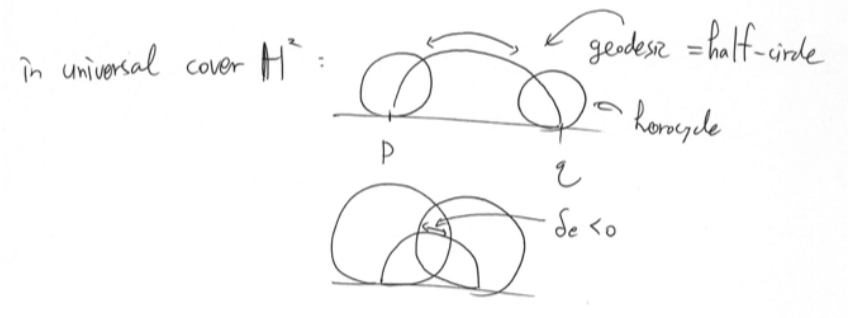
Choose one ideal triangulation T of S.

Given a point $[\rho, h] \in \mathcal{T}^d(S)$, how do we get coordinates, i.e. some set of real numbers representing this point?

Stretch all ideal arcs of T to unique geodesics ('shortest' paths) with respect to g, in their respective isotopy classes. (question: why possible? why unique? exercise!)



Then, if you try to measure the geodesic length of an arc e of T with respect to g, you get ∞. Truncate both ends of e by the horocycles at the endpoint punctures, and then measure the geodesic length δ_e of the remaining finite-length part of e. So, δ_e can be thought of as the distance between the horocycles. In fact, δ_e is defined as the *signed* distance between the horocycles. That is, if the horocycles are too big so that they truncate too much as in the figure below, we set δ_e to be minus the distance between the horocycles.



Def. *Penner's* **lambda length** *for* $[g, h] \in \mathcal{T}^d(S)$ *at arc* e *of* T *is*

$$\lambda_{e,T}([g, h]) := \exp(\delta_e/2) \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Note that $\lambda_{e,T}([g, h])$ does not depend on T, so one can write it as $\lambda_e([g, h])$.

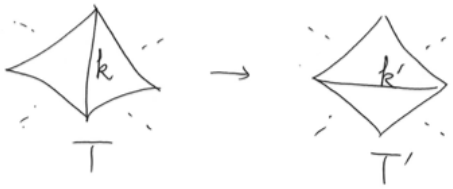
Thm. (Penner, 1980's) *For each ideal triangulation T, the map*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^d(S) &\to (\mathbb{R}_{>0})^T \\ [g,h] &\mapsto (\lambda_e([g,h]))_{e\in T} \end{aligned}$$

is a diffeomorphism.

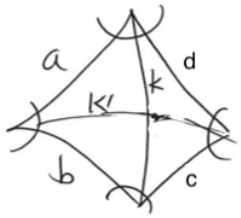
In fact, at this point, we can't say that this is a diffeomorphism. We can only understand this statement as saying that this map is a set bijection.

A crucial point is what happens if we choose a different ideal triangulation T'. Easiest way to choose a different T' is to replace exactly one arc k of T by another one; this process is called a **flip** at k:



Then, only one arc changes, so $\lambda_{e,T} = \lambda_{e,T'}$ for all arcs e other than k. What about the coordinate $\lambda_{k'} = \lambda_{k',T'}$ for the new arc k'?

Thm. ("Ptolemy relation") *If a, b, c, d are sides of an ideal quadrilateral, and if k, k' are two ideal diagonals of this quadrilateral,*



then the lambda length coordinate functions satisfy

$$\lambda_k \lambda_{k'} = \lambda_a \lambda_c + \lambda_b \lambda_d$$

Note: this is an example of an "exchange relation", which looks like

$$\text{new} \cdot \text{old} = \text{product} + \text{product}.$$

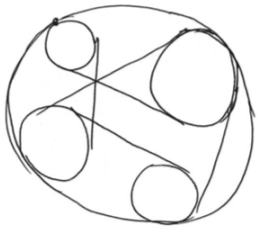
Another example of such a relation is the famous Plücker relation for Grassmannians.

Note: so

$$\lambda_{k'} = \frac{1}{\lambda_k}(\lambda_a \lambda_c + \lambda_b \lambda_d)$$

Note: This pretty coordinate change formula justifies the strange factor 1/2 in the exponent of the definition of the lambda length $\lambda_e = e^{\delta_e/2}$.

Note: The actual "Ptolemy's Theorem" is for the Euclidean lengths of the Euclidean quadrilateral inscribed in a circle. The above version of Ptolemy's theorem is an incarnation of 'Casey's Theorem' of 19c.



4 Cluster varieties

To touch upon the subject of cluster varieties, we now focus on the coordinate change formulas only, and not the 2d geometry.

Per each ideal triangulation T of S, consider the set of commuting formal variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ (where $N = |T| = 6g - 6 + 3n$) enumerated by the arcs of T, and consider the split algebraic torus

$$\mathcal{A}_T = (\mathbb{G}_m)^N = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\lambda_1^{\pm 1}, \ldots, \lambda_N^{\pm 1}]),$$

which is an affine scheme whose ring of regular functions is the N-variable Laurent polynomial ring. Such a data is called a **seed**.

For another ideal triangulation T', we would have another variables $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_N$, and the corresponding affine scheme

$$\mathcal{A}_{T'} = (\mathbb{G}_m)^N = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[(\lambda'_1)^{\pm 1}, \ldots, (\lambda'_N)^{\pm 1}]).$$

We glue the tori $(\mathbb{G}_m)^N$ and $(\mathbb{G}_m)^N$ for T and T' along the rational map which we denote by

$$\mu_{TT'} : \mathcal{A}_T \to \mathcal{A}_{T'}$$

which is defined by the coordinate change formulas for the lambda lengths. Namely, for example, if T and T' are related by the flip at edge k, then $\mu_{TT'}$ is defined so that its pullback is given by

$$\mu^*_{TT'}(\lambda'_e) = \begin{cases} \lambda_e & \text{if } e \neq k \\ \frac{1}{\lambda_k}(\lambda_a \lambda_c + \lambda_b \lambda_d) & \text{if } e = k, \end{cases}$$

where a, b, c, d are the arcs of T forming the ideal quadrilateral (in this counterclockwise orderr) having k as a diagonal.

Consider all possible ideal triangulations T of S, and glue all the tori $\mathcal{A}_T$ together by these maps $\mu_{TT'}$, called **mutations**. The resulting scheme is an example of the **cluster $\mathscr{A}$-variety**. To be a bit more precise, a cluster $\mathscr{A}$-variety is associated to a quiver (i.e. directed graph). In our case, each ideal triangulation T yields a quiver Q_T constructed as follows: each arc of T has a node of Q on it, and for each ideal triangle we draw the three arrows between the nodes at the sides of this triangle, forming a counterclockwise 3-cycle. The cluster $\mathscr{A}$-variety constructed above is the cluster $\mathscr{A}$-variety associated to the quiver Q_T.

Note: similar construction for the enhanced Teichmüller space $\mathcal{T}^+(S)$ with exponentiated (Thurston's) shear coordinate functions $X_{e,T} = e^{x_{e,T}}$ (defined per each arc e of T) yield the **cluster $\mathscr{X}$-variety** for the quiver Q_T.

Note: there is no subtraction involved in the coordinate change formula $\rightsquigarrow$ this allows us to evaluate the cluster variety at a *semi-field* (which is like a field without subtraction), e.g. $\mathbb{R}_{>0}$.

Note: we can now use tools from the theory of cluster algebras and cluster varieties, to study Teichmüller spaces. Especially for the quantization problem (with respect to the Weil-Petersson Poisson structure on $\mathcal{T}^+(S)$, which can be interpreted in terms of a generalized combinatorial description for cluster $\mathscr{X}$-varieties).

More details on cluster varieties and their quantization can be found in:

V.V. Fock and A.B. Goncharov, *Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **103** (2006), 1–211. arXiv:math/0311149

V.V. Fock and A.B. Goncharov, *The quantum dilogarithm and representations of quantum cluster varieties*, Invent. Math. **175** (2) (2009), 223-286. arXiv:math/0702397

Poincaré conjecture

"Every simply connected closed n-manifold is homeomorphic to the n-sphere."

$n=1$; Trivial.
$n=2$; classical result in 19th century.
$n \geq 7$; Smale, 1961
$n=6$; Stallings, 1962
$n=5$; Zeeman, 1961
$n=4$: Freedman, 1982 (→ Fields. 1986)

"Topology"

In 1983, R. Hamilton introduced the Ricci flow

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(\cdot,t) = -2\,\mathrm{Ric}_{ij}(\cdot,t)$$

$$= \Delta_g g_{ij} + \text{lower order terms.}$$

In 2002, Perelman settled the $n=3$ case by using the Ricci flow.

"Geometric analysis"

Smooth Poincaré conjecture

"Every simply connected smooth closed n-manifold is diffeomorphic to a round n-sphere."

$n = 1, 2, 3, 5, 6 \Rightarrow$ True

↳ Ricci flow

There exist counter-examples from $n = 7$.

of (exotic) spheres (cf. J. Milnor 1956)

$n=7 : 28$, $n=8 : 2$, $n=9 : 8$, ...

$n = 4$ remains an open problem.

Remark) $\exists$ so many exotic $\mathbb{R}^4$, while $\exists$ no exotic $\mathbb{R}^n$ for $n \neq 4$.

Topological problems in geometric flows.

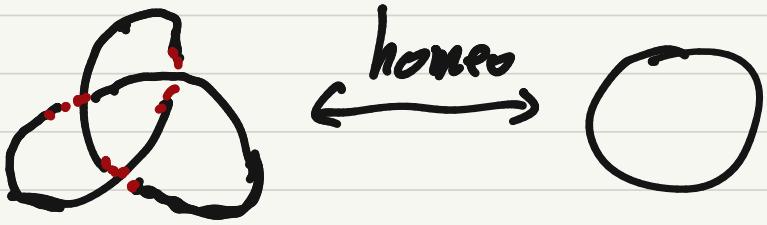
1. 4D smooth Poincaré conjecture
2. 4D smooth Schoenflies problem.
3. Topological classification of Calabi-Yau threefolds
4. Tightness in contact manifolds

Homeomorphism Vs Ambient isotopy.

Def. Given topological space X, Y.
a function $f: X \to Y$ is
a homeomorphism if

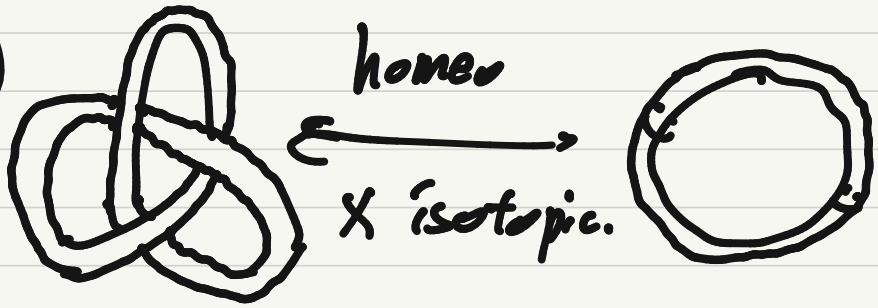
① f is 1-1,
② " continuous.
③ f^{-1} is " .

Thm: Every closed simple curve in $\mathbb{R}^n$ is homeomorphic to S^1.

Ex) 

Def: $g: N \to M$, $h: N \to M$ are embeddings.
$F: M \times [0,1] \to M$ is continuous.
$F_0 = Id$, F_t is a homeo from M to M
$F_1 \circ g = h$.
$\Rightarrow F$ is an ambient isotopy
taking g to h.

Ex)



Trefoil knot standard torus

- Jordan-Schoenflies theorem.

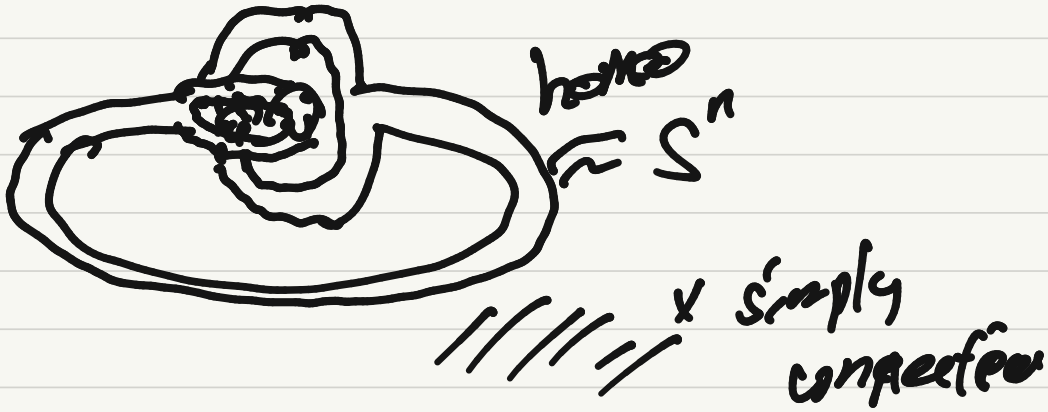
Every closed simple curve in $\mathbb{R}^2$ bounds a disk.



(bounds : is the boundary of)

Q. Does every simply-connected closed hypersurface embedded in $\mathbb{R}^n$ bound a ball B^n ?

A. No. Alexander's horned sphere



Q. Let Σ be a smooth hypersurface embedded in $\mathbb{R}^n$, diffeomorphic to a round $S^{n-1} \Rightarrow \Sigma$ is unknotted!!

A. True for all $n \neq 4$.

The case $n=4$ is an open problem.

"4D Smooth Schoenflies problem"

Conjecture 2?

Geometric Analysists have been trying to show that the problem is true by using the mean curvature flow.

Let $X : M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ be a smooth one parameter family of immerseus satisfying $\frac{\partial}{\partial t} X = \Delta_g X$.

Then, we call $M_t := X(M^n, t)$ a mean curvature flow.

c.f. Ricci flow

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2 Ric_{ij} = \Delta g_{ij} + \text{lower order terms}$$

Heat equation (Diffusion equation)

Let $I=[a,b] \subset \mathbb{R}$, $T>0$.

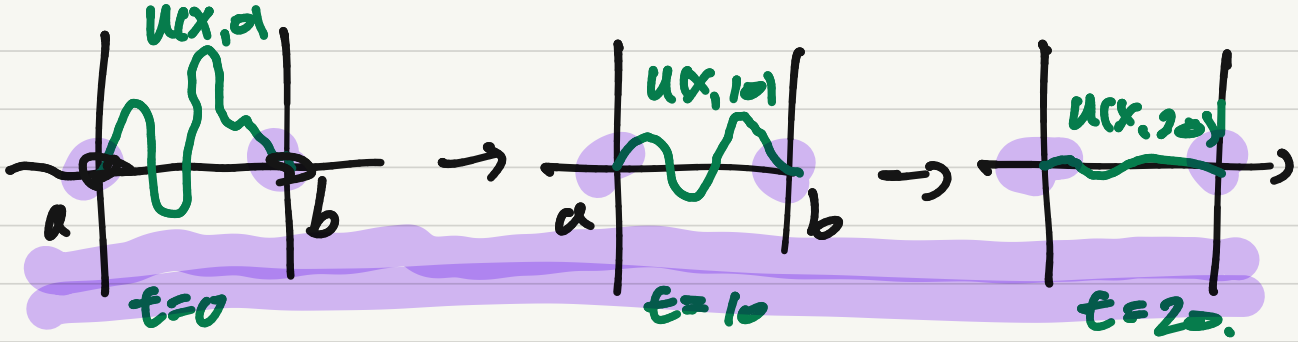
$u : I \times [0,T) \to \mathbb{R}$ is a smooth function satisfying

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t). \quad - (*)$$

Then, u is a solution to the heat equation $(*)$.

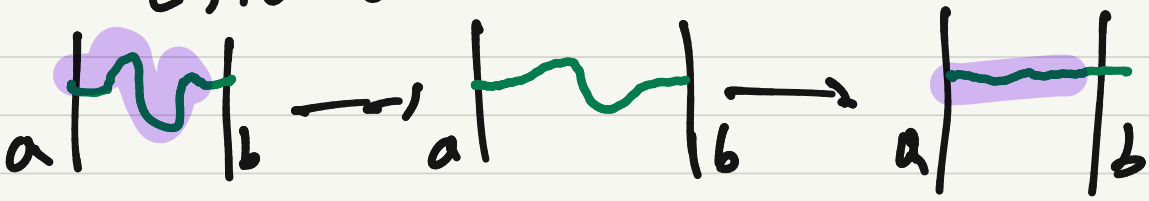
Ex) Suppose $u(a,t) = u(b,t) = 0$ for all $t \geq 0$.

Then. $\lim_{t \to +\infty} \sup_I |u(x,t)| = 0$.



Ex) Suppose $u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0 \quad \forall t \geq 0$

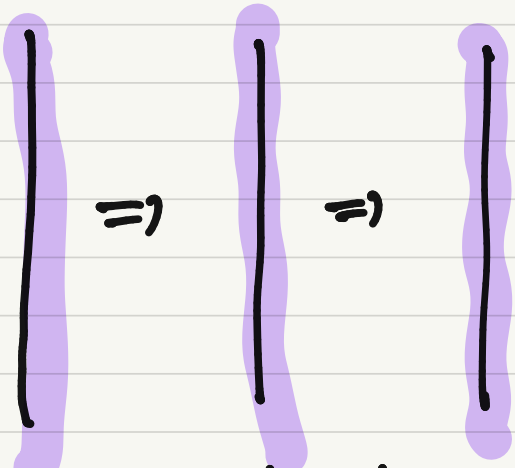
$$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \sup_I \left| u(x,t) - \int_a^b u(x,0)\,dx \right| = 0.$$



Equilibrium ($\vec{0}$) of the curve shortening flow. ($n=1$, MCF in $\mathbb{R}^2$)

Ex 1)

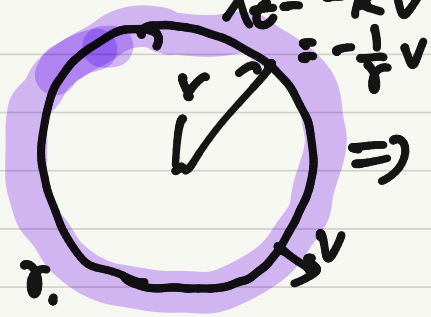
M_0 is a line



$\frac{\partial}{\partial t}X = \Delta_g X = -kv = 0$

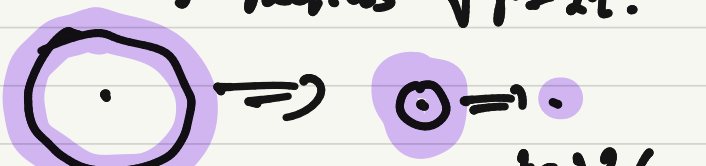
Ex 2)

M_0 is a circle of radius r.



$X_t = -kv = -\frac{1}{r}v$

X_t is a circle of radius $\sqrt{r^2-2t}$.



$t = r^2/2$.

proof) $\rho(t)$ denote the radius

$\Rightarrow \rho' = \langle X_t, v \rangle = -k = -1/\rho$

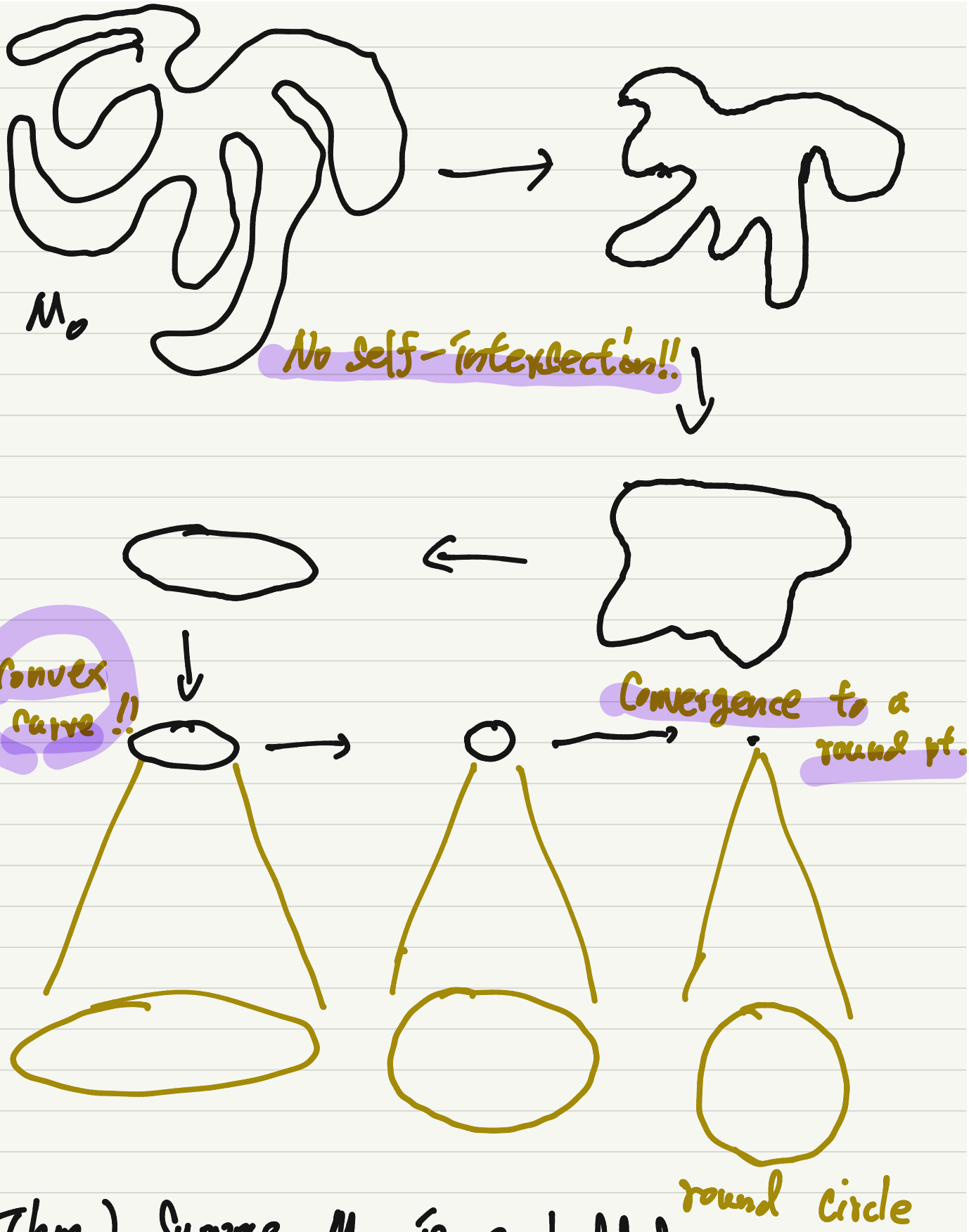
$\Rightarrow -1 = \rho\rho' = \frac{1}{2}(\rho^2)'$

$\Rightarrow \rho^2(t) = \rho^2(0) - 2t = r^2 - 2t$

$\therefore \rho(t) = \sqrt{r^2-2t}$.

Thm) Let M_0 be a closed simple curve in $\mathbb{R}^2$

Then. $\exists\, T < +\infty$ such that M_t converges to a round point as $t \to T$



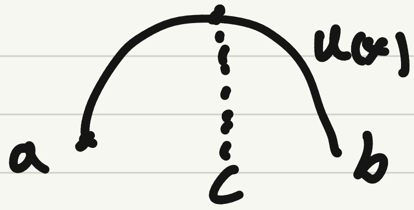
Thm) Suppose M_0 is embedded.
Then, M_t remains embedded
while the MCF is smooth.

Maximum Principle

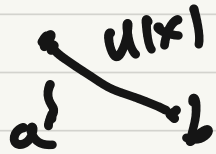
Let $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ is of class C^2.

Then, $\exists\, c \in [a,b]$ s.t. $u(c) = \max\limits_{[a,b]} u$.

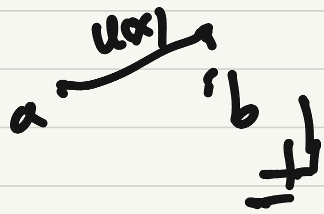
If $a < c < b$, then $u''(c) \le 0$, $u'(c) = 0$.



If $a = c$, then $u'(c) \le 0$



If $a = b$, then $u'(c) \ge 0$



Application.

Ex 1) Suppose $u(a) = u(b) = 0$

$$u'' + u' - u = 0 \quad \text{in } [a,b]$$

Then, $u(x) \le 0 \quad \forall x \in [a,b]$

proof) Suppose $u(c) = \max u > 0$

Then, $c \ne a$, $c \ne b$.

$\Rightarrow u''(c) \le 0$, $u'(c) = 0$.

$\Rightarrow u(c) = u''(c) + u'(c) \le 0$ ⨳

$\therefore u \le 0$ in $[a,b]$

Ex 2) Let $u : [a,b] \times [0,T] \to \mathbb{R}$

$u(a,t) \le 0$, $u(b,t) \le 0$ $\forall t \in [0,T]$

$u(x,0) \le 0$. $\forall x \in [a,b]$

$u_t = u_{xx} - u_x - u$ in $[a,b] \times [0,T]$

Then, $u(x,t) \le 0$ $\forall (x,t) \in [a,b] \times [0,T]$

proof) Suppose $u(x_0,t_0) = \max u$.

Then, $x_0 \in (a,b)$, $t_0 > 0$.

Hence, $u_{xx}(x_0,t_0) \le 0$, $u_x(x_0,t_0) = 0$

In addition, $u_t(x_0,t_0) \ge 0$

$[\because u(x_0,t) \le u(x_0,t_0)$ $\forall t \le t_0]$

$\Rightarrow u(x_0,t_0) = u_{xx} - u_x - u_t \le 0$ $\not\Rightarrow$.

$\therefore u(x,t) \le 0$ in $[a,b] \times [0,T]$ □

Louis Nirenberg

1925.02.28 – 2020.01.26.

"I have made a living off the maximum principle."

Reference: "PDEs" by L. Evans

"2nd order parabolic DEs" by G. Lieberman.

"Elliptic PDEs" by Q. Han & F. Lin

"Elliptic PDEs of 2nd order" by D. Gilbarg – N. Trudinger.

"Lectures on MCFs" by X.-Ping Zhu.

Lemma) **Weak maximum principle.**

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open set.

$u : \overline{\Omega} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ satisfies

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \leq a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x,t) + b_i(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x,t)$$

where $a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda |\xi|^2$, $(\lambda > 0)$

holds for all $\xi \in \mathbb{R}^n$.

If $u \leq 0$ on $\partial\Omega \times [0,T]$

and $\Omega \times \{0\}$.

Then, $u \leq 0$ holds in $\overline{\Omega} \times [0,T]$

proof in $n=1$). Define $u^\varepsilon = u - \varepsilon t$, $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow u^\varepsilon_t = u_t - \varepsilon = a u^\varepsilon_{xx} + b u^\varepsilon_x - \varepsilon$

Suppose $u^\varepsilon(x_0, t_0) = \max u^\varepsilon > 0$

$\Rightarrow u^\varepsilon_{xx} \leq 0$. $u^\varepsilon_x = 0$. $u^\varepsilon_t \geq 0$

$\Rightarrow \varepsilon = a u^\varepsilon_{xx} + b u^\varepsilon_x - u^\varepsilon_t \leq 0$ ↯

$\therefore u^\varepsilon \leq 0$ in $\overline{\Omega} \times [0,T]$ $\forall \varepsilon > 0$

Passing $\varepsilon \to 0$ yields $u \leq 0$.

Thm) Strong maximum principle

If $u(x_0, t_0) = 0$

at some $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$

then, $u = 0$ in $\Omega \times [0, T]$. pf!

Let $M_t = (x, u(x,t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$

be a MCF, namely $X_t = -Hv$.

Recall. $X = (x, u(x,t)) \Rightarrow X_t = (0, u_t)$

$$H = \operatorname{div}\left(Du / \sqrt{1+|Du|^2} \right)$$

$$v = (Du, -1) / \sqrt{1+|Du|^2}$$

$$\Rightarrow \frac{u_t}{\sqrt{1+|Du|^2}} = -\langle X_t, v \rangle$$

$$= H = \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right)$$

$$\therefore u_t = \sqrt{1+|Du|^2}\, \operatorname{div}\left(Du / \sqrt{1+|Du|^2} \right)$$

$$= \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{1+|Du|^2} \right) u_{ij} \quad - (*)$$

1D) $u_t = u'' / (1 + |u'|^2)$

Ex) $M_t = (x, u(x,t))$, $N_t = (x, v(x,t))$

Solve (*) in $\Omega \times (0, T]$

and $u \le v$ on $\partial\Omega \times (0, T]$

and $\bar{\Omega} \times \{0\}$.

Then, $u \le v$ in $\Omega \times (0, T]$

If $u = v$ at some pt in $\Omega \times (0, T]$

then $u = v$ in $\bar{\Omega} \times (0, T]$

proof in 1D) Define $w = u - v$.

Then, $w \le 0$ if $x \in \partial\Omega$ or $t = 0$.

$$w_t = u_t - v_t = \frac{u''}{1 + |u'|^2} - \frac{v''}{1 + |v'|^2}$$

$$= \frac{(u-v)''}{1 + |u'|^2} + v'' \left(\frac{1}{1 + |u'|^2} - \frac{1}{1 + |v'|^2} \right)$$

$$= \frac{w''}{1 + |u'|^2} + v'' \frac{|v'|^2 - |u'|^2}{(1 + |u'|^2)(1 + |v'|^2)}$$

$$= \frac{w''}{1 + |u'|^2} - \frac{v''(v' + u')w'}{(1 + |u'|^2)(1 + |v'|^2)}.$$

□.

Thm) $M_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$ is a smooth closed MCF for $t \in [0,T)$.
and M_0 is embedded.
Then, each M_t is embedded.

proof) Suppose NOT.

Then. (p_0, t_0) and (p_1, t_0) s.t.
M_t is embedded for $t < t_0$,

$X(p_0, t_0) = X(p_1, t_0)$, $p_0 \neq p_1$.

Since M_t is C^∞.

$$\sup_{0 \le t \le t_0} \sup_{M_t} |A|^2 \le C < +\infty.$$

We rotate M_t so that $\nu(p_0, t_0) = -e_{n+1}$.
and translate to have $X(p_0, t_0) = 0$.

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ and $u : B_\delta(0) \times [t_0 - \delta, t_0] \to \mathbb{R}$

$v : \quad " \quad \to \mathbb{R}$

s.t. $(x, u(x,t)), (x, v(x,t)) \in M_t$ in $B_\delta \times [t_0 - \delta, t_0]$
and $u \le v$ in $B_\delta \times [t_0 - \delta, t_0]$
$u = v$ at $(0, t_0)$

Thus. by the strong max prin.

$u = v$ in $B_\delta(o) \times [t_0 - \delta, t_0]$

$\Rightarrow$ M_t is NOT embedded for $t \in [t_0 - \delta, t_0]$

$\Rightarrow \Leftarrow$!

Remark) Suppose M_0 is a knotted (C^∞ hypersurface embedded in $\mathbb{R}^{n+1}$)

Then. M_t remains knotted until M_t lose the smoothness.

($\Leftrightarrow$ until M_t develops singularities)

where $|A| = +\infty$.

Thm) M_0' is embedded and encloses M_0^2.

$\Rightarrow M_t'$ encloses M_t^2 while they are C^∞.

Thm) A closed MCF M_t must develop a singularity in finite time.

pf) $\exists R \gg 1$ s.t. $M_0 \subset B_R(0)$

Let $N_t = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = R^2 - 2t \}$.

Then. N_t is a C^∞ MCF for $t \in [0, R^2/2)$

and N_0 encloses M_0.

Suppose M_t is C^∞ for $t \in [0, R^2/2]$

Then. M_t is enclosed by N_t for $t \in [0, R^2/2)$.

However, $N_t \to \{0\}$ as $t \to R^2/2$.

$\not\in$.

Ex) $u: \mathbb{R}^n \times [0,T) \to \mathbb{R}$ solves

$$u_t = (1+|Du|^2)^{1/2} \operatorname{div}\left(Du/\sqrt{1+|Du|^2}\right)$$

and $u(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Then, $u(x,t) = 0$ in $\mathbb{R}^n \times [0,T)$

Remark) $\exists\, u \not\equiv 0$ s.t.

$$u_t = u_{xx} \text{ in } \mathbb{R} \times [0,T)$$

and $u(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

See Tychonoff's counter-example of the uniqueness.

Thm) M_0 is a closed strictly convex simple curve in $\mathbb{R}^2$.

Then. M_t remains closed convex and simple,

proof) Let k denote the curvature w/ $k(\cdot,0) > 0$.

By Zhu's note, $k_t = k_{ss} + k^3$

By max. prin. $\Rightarrow k \geq \min k(\cdot,0) > 0$. $\therefore$

$\Rightarrow$ convex..

Thm) M_0 is a closed strictly convex hypersurface embedded in $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow M_t$ remains convex.

Pf) Let $\kappa_1, \cdots, \kappa_n$ denote the principal curvatures of M_t.

Then. $K := \kappa_1 \cdots \kappa_n = \det(h_{ij}) \det(g^{ij})$

where g is the metric and h is the 2nd fundamental form.

By this lecture notes

$$\partial_t g_{ij} = -2H h_{ij}, \quad (H = g^{ij} h_{ij})$$

$$\partial_t h_{ij} = \Delta_g h_{ij} - 2H h_{ik} g^{kl} h_{jl} + |A|^2 h_{ij}$$

where $\Delta_g = g^{ij} \partial_i \partial_j + g^{ij} \Gamma_{ij}^k \partial_k$.

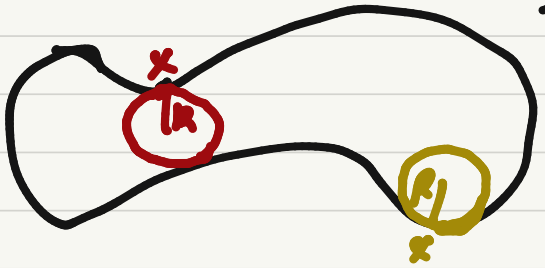
$$\Rightarrow \partial_t K^{\frac{1}{n}} = \Delta_g K^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{\partial K^{\frac{1}{n}}}{\partial h_{ij} \partial h_{kl}}\right) \nabla_m h_{ij} \nabla^m h_{kl} + \frac{1}{n} K^{\frac{1}{n}} H$$

$$\geq \Delta_g K^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} K^{\frac{1}{n}} H.$$

$\Rightarrow K \geq \min_{M_0} K > 0$. $\Rightarrow$ every $\kappa_i > 0$

$\Rightarrow$ Convex !!

Given $X(p,t) \in M_t$. we denote the inscribed radius of M_t at $X(p,t)$ by $R(p,t)$. Namely,



If $H(p,t)R(p,t) \geq \alpha > 0$ in M_t then we say M_t is α-noncollapsed.

Thm) If M_0 is closed embedded and α-noncollapsed. then M_t remains α-noncollapsed.

proof) Recall $X: M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Define $Z: M^n \times M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}$ by

$$Z(p,q,t) = \frac{1}{2} H(p,t) \|X(p,t) - X(q,t)\|^2 - \alpha \langle X(p,t) - X(q,t), \nu(p,t) \rangle$$

$Z(\cdot,\cdot,t) \geq 0 \Leftrightarrow M_t$ is α-noncollapsed

By max prin. $Z(\cdot,\cdot,0) \geq 0 \Rightarrow Z(\cdot,\cdot,t) \geq 0$

See B. Andrews, Geom&Topo. 2012.

"Mean convex flow and Schoenflies problem."

Let $k_1 \leq \cdots \leq k_n$ denote the principal curvatures of a hypersurface Σ^n in $\mathbb{R}^{n+1}$

If $H = k_1 + \cdots + k_n > 0$, we say that Σ^n is mean convex.

If $k_1 + k_2 > 0$, we say that Σ^n is 2-convex

Thm) An embedded 2-convex sphere $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bounds B^{n+1}.

(i.e. unknotted, contractable, (ambient) isotopic to round S^n)

see Huisken-Sinestrari 09'. Brendle-Huisken 16'. Haslhofer-Kleiner 19'

Buzano-Haslhofer-Hershkovits 16'.

$\approx$ Perelman 02'. (3D Ricci flow)

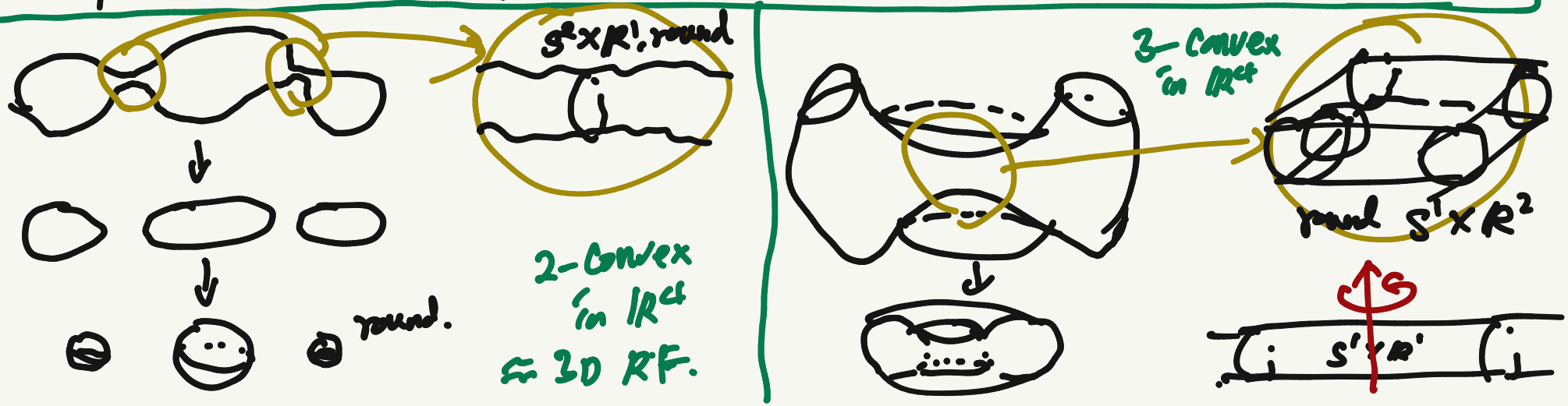
Remark) • 2-convex in $\mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow$ mean convex in $\mathbb{R}^3$.

• Mean convex flow in $\mathbb{R}^4$ $\leftsquigarrow$ 4D Ricci flow.

Technically...

Q. Every embedded smooth mean convex 3-sphere in $\mathbb{R}^4$ bounds B^4 ??

Snapshot of 2-convex flows and 3-convex flows ($k_1+k_2+k_3>0$)



Huisken's monotonicity 90'] Given $X_0 = (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1} \times [0, T)$

$$\frac{d}{dt} \int_{M_t} \rho_{X_0} \, d\mu = - \int_{M_t} \left\| H\nu - \frac{x - x_0}{2(t - t_0)} \right\|^2 \rho_{X_0} \, d\mu \leq 0, \quad \text{for } t < t_0$$

where $\rho_{X_0}(x, t) = [4\pi(t_0 - t)]^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x - x_0|^2}{4(t_0 - t)}}$.

We consider rescaling $\tau = -\log(t_0 - t)$ and

$$\tilde{M}_\tau = (t_0 - t)^{-1/2}(M_t - x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau} \int_{\tilde{M}_\tau} \tilde{\rho} \, d\mu = - \int_{\tilde{M}_\tau} \left\| H\nu - \frac{1}{2} x \right\|^2 \rho \, d\mu, \quad \text{for } \tau < +\infty$$

where $\tilde{\rho}(x) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}$. Hence. $H\nu - \frac{1}{2} x \to 0$ as $\tau \to +\infty$

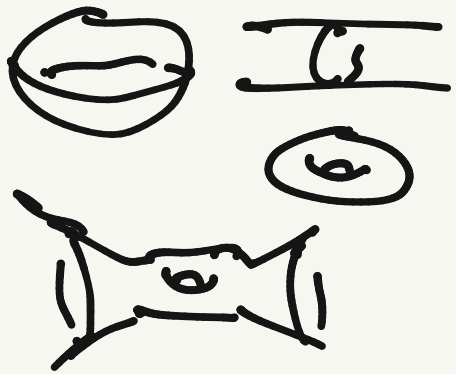
Def) We say that Σ is a shrinker if $H = \frac{1}{2}\langle x, \nu\rangle$.

Rmk) $\sqrt{-2t}\,\Sigma$ is a MCF and $H\nu - \frac{1}{2}x = 0$

Thm) Every rescaled flow $\mathcal{M}_t$ either disappears

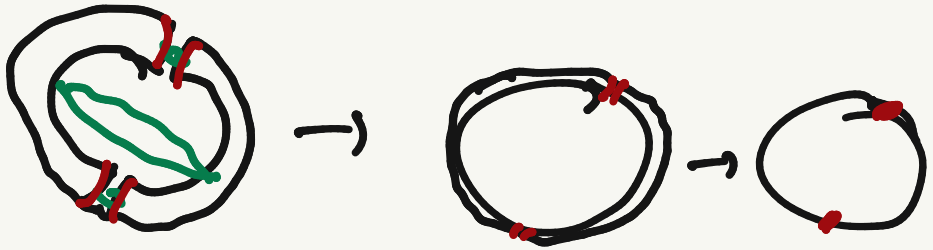
or converges to a shrinker w/ multiplicity (in measure sense)

Ex) Shrinkers





Potential Ex) Convergence w/ mult.



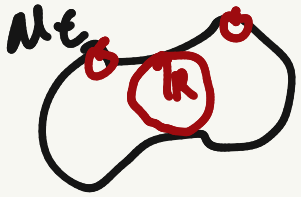
Thm) If M_0 is mean convex, then M_t remains mean convex.

Pf) $H_t = \Delta_g H + |A|^2 H$. $\Delta_g = g^{ij}\partial_i\partial_j + g^{ij}\Gamma_{ij}^k\partial_k$.

By max prin, $H > 0 \quad \forall t > 0$.

Def) α- noncollapsing.

Let $R(x,t)$ denote the radius of the largest round sphere tangent at $x \in M_t$ and enclosed by M_t.



If $R(x,t)\,H(x,t) \geq \alpha > 0$,

then we say that M_t is α- noncollapsed.

Thm) If M_0 is α- noncollapsed.
then M_t is " for $t>0$.

Ref) B. White 00'. Sheng-Wang 09'. B. Andrews 12'.
C.f. κ-noncollapsing of Ricci flow of Perelman. 02'.

prof) $Z : M^n \times M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}$ (Andrews 12')

$$Z(p,q,t) = \alpha \langle X(p,t) - X(q,t), \nu(p,t) \rangle - \|X(p,t) - X(q,t)\|^2 H(p,t)$$

$Z \geq 0 \Leftrightarrow M_t$ is α- noncollapsed

If $Z(\cdot,\cdot,0) \geq 0$, then $Z(\cdot,\cdot,t) \geq 0$ $\forall\, t>0$
by the max. prin.

Cor) Blow-up limit of rescaled mean convex flow
Can NOT be a shrinker w/ multiplicity.

Thm) Huisken.
A closed mean convex shrinker must be the round sphere

pf) $\Delta\left(\frac{|A|^2}{H^2}\right) + V\cdot\nabla\left(\frac{|A|^2}{H^2}\right) \geq \square^2 \geq 0$

Strong max prin $\Rightarrow$ $|A|^2 = H^2$ and so $\square^2 = 0$
$\Rightarrow \square^2 = 0 \Rightarrow \nabla A = 0$. i.e. space form.

Cor) A convex shrinker must be a round sphere.
a round cylinder. or a hyperplane.

Thm) Huisken - Sinestrari. 99'

A blow-up limit of mean convex flow must be convex.

Namely, the limit shrinker must be a round sphere or a round cylinder..

pf) $\sigma_k = \sum \kappa_{i_1}\kappa_{i_2}\cdots\kappa_{i_k}$. (ex. $\sigma_1 = H$. $\sigma_2 = R$. $\sigma_n = K$)

then. given $\eta > 0$ $\exists$ $C_{\eta,k}$ s.t.

$$S_k \geq -\eta H^k - C_{\eta,k}.$$

Thm) If M_0 is 2-convex. then M_t is 2-convex for $t > 0$

Moreover. $\frac{\kappa_1+\kappa_2}{H} \geq \beta =: \min_{M_0} \frac{\kappa_1+\kappa_2}{H} > 0$ holds for $t > 0$.

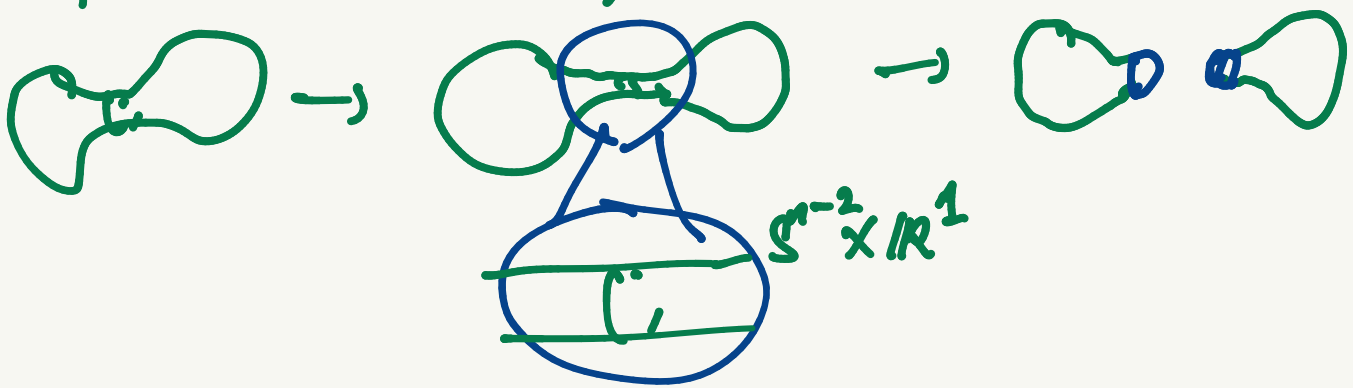
pf) $Z = k_1 + k_2$ is a concave operator. See Caffarelli-Cabre, "Fully nonlinear elliptic eq."

Hence, $Z_t \geq \Delta_g Z + |A|^2 Z \Rightarrow (Z - \beta H)_t \geq \Delta_g (Z - \beta H) + |A|^2 (Z - \beta H)$

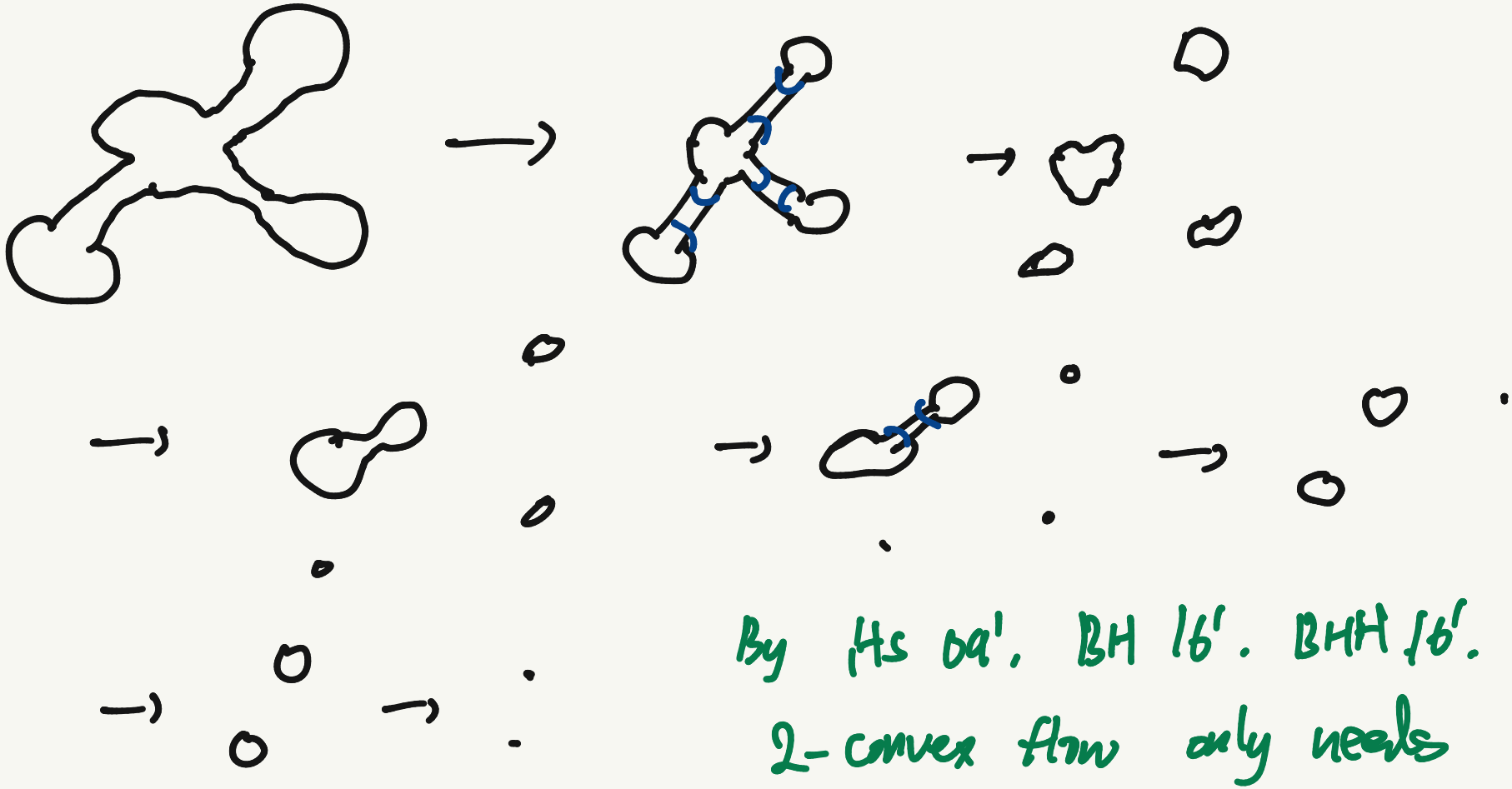
By max princ. $Z - \beta H \geq 0$. $\therefore k_1 + k_2 \geq \beta H$.

Cor) If M_0 is 2-convex, then a blow-up limit shrinker must be a round S^{n-1} or a round $S^{n-2} \times \mathbb{R}^1$.

Snapshot of Surgery)



$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{1}{x_{i+1}} - \frac{x_i}{(x_{i+1})^2}$$

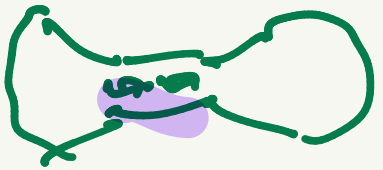


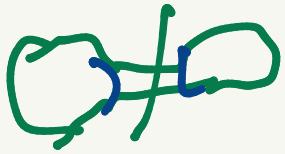
By Hs 04', BH 16'. BHH 16'.

2-convex flow only needs finitely many surgery

$\Rightarrow$ 2-convex sphere is unknotted.

Day 4 : Gradient flow and perturbation.







Recall

① $\sqrt{-2t}\,\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ is a MCF $\Leftrightarrow$ Σ is a shrinker.

$\Leftrightarrow$ Σ satisfies $H = \frac{1}{2}\langle x, \nu \rangle$

② Every blow-up limit at a singularity must be a shrinker w/ multiplicity



③ Non-collapsed flow's blow-up limit must be a shrinker w/ multi 1.

④ Mean convex flow is non-collapsed.

⑤ Mean convex shrinkers are round $S^n, S^{n-1}\times\mathbb{R}^1, \cdots S^1\times\mathbb{R}^{n-1}$.

⑥ The surgery theory has been developed only for $S^{n-1}\times\mathbb{R}^1$.

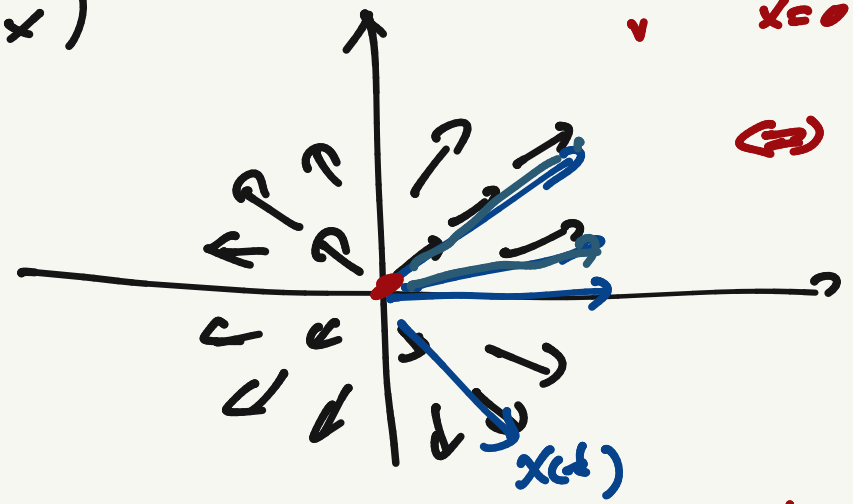
Multiplicity one conjecture) A closed MCF has mult-1 blow-up limit at singularities.

Q1. What happens if we do not operate surgery...
Q2. Can we manipulate MCFs to have singularities w/ some good properties ??
and... What are the good properties... ??

Gradient flow in $\mathbb{R}^n$.

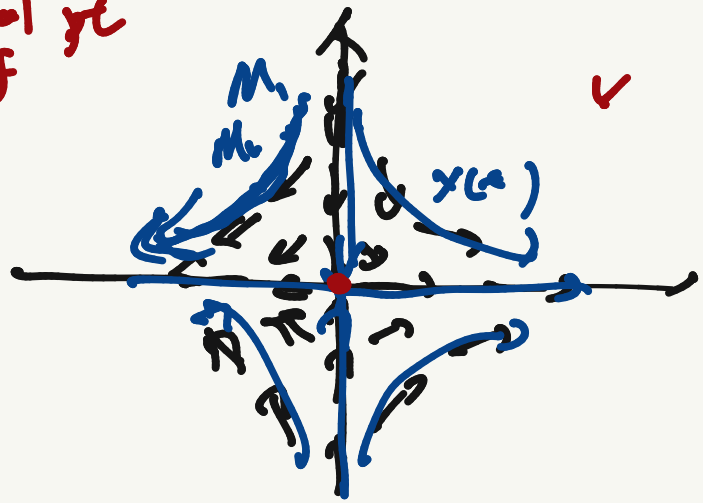
Given $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ of class C^1, a curve $X: I \to \mathbb{R}^{n+1}$ satisfying $\frac{d}{dt} X(t) = -Df(X(t))$ is a (negative) gradient flow of f.

Ex)



$x=0$ is critical pt of f $\Leftrightarrow Df(x)=0$

$-f(x,y) = x^2+y^2$. $-Df = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$.



$-f(x,y) = x^2 - y^2$. $-Df = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$

MCF is a gradient flow of Entropy.

Colding-Minicozzi '12) we define the entropy of Σ by.

$$Ent(\Sigma) = \sup_{y \in \mathbb{R}^{n+1}, \lambda > 0} \int_\Sigma \frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\lambda}} d\mu_\Sigma.$$

Then. by Huisken's monotonicity $\frac{d}{dt} Ent(M_t) \le 0$. for MCF M_t.

Namely. every MCF is a gradient flow of Entropy. :)

$\mathbb{R}^n$ = space of surface

Remark) Every shrinker $\Longleftrightarrow$ a critical pt of Entropy.

Remark) Entropy is invariant under scaling. and rigid motion.

i.e. $Ent(\Sigma) = Ent(\lambda\Sigma) = Ent(\Sigma + y) = Ent(R\Sigma)$

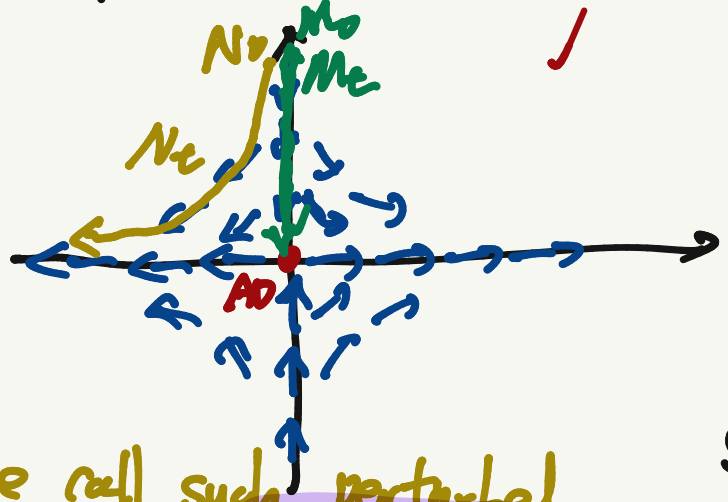
↳ rotation matrix.

We can resolve the difficulties in Q1 & Q2 by using gradient flow.

For example, we consider the case that M_t converges to the Angenent doughnuts after rescaling.



Then, the M_t looks like

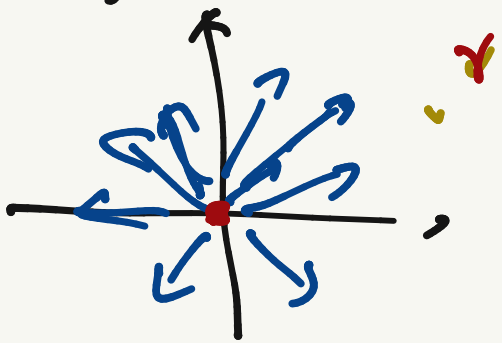


$\Rightarrow$ So, we can choose N_0 which is close enough to M_0, and the MCF N_t avoids AD-singularity of M_0.

Since N_0 and M_0 are ambient isotopy, we can consider N_t instead of M_t to study the Topo. of M_0

We call such perturbed MCF N_t a generic MCF.

Stability of critical points



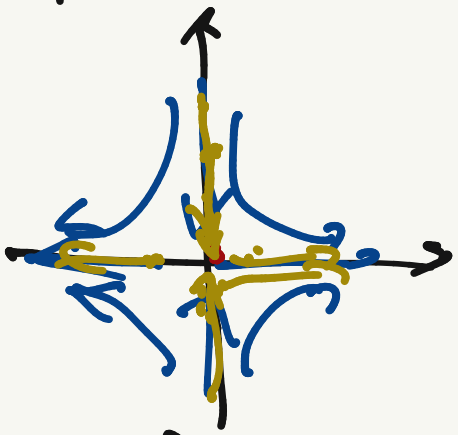
$f = x^2 + y^2$

$Df = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

positive eigenvalues

0 is unstable

Every vector is an eigenvector.



$f = x^2 - y^2$

$Df = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

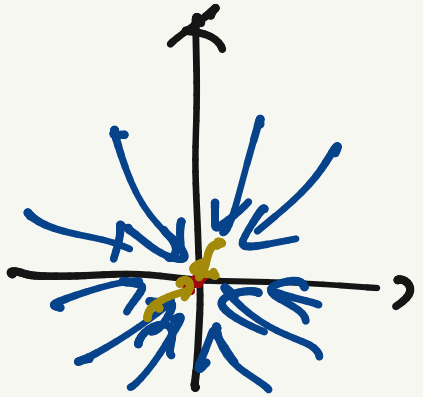
mixed.

0 is unstable

$(0,1)$, $(1,0)$ are eigenvector

$(0,1)$: stable

$(1,0)$: unstable



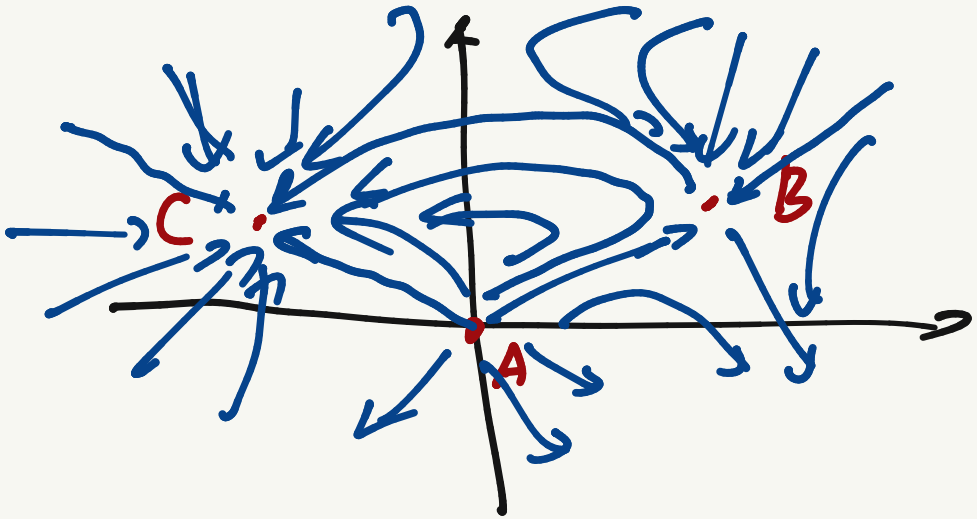
$f = -x^2 - y^2$

$Df = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

negative eigen.

0 is stable.

Every vector is eigenvector.



A, B are unstable

C is stable

Heat eq is a gradient flow.

$u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $u(x+2\pi, t) = u(x, t)$, $u_t = u''$.

Consider $E(u) = \int_0^{2\pi} |u'|^2 dx$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} E(u) = 2\int_0^{2\pi} u' u'_t dx = 2\int_0^{2\pi} u'' u_t dx = -2\int_0^{2\pi} |u_t|^2 dx \leq 0.$$

integration by parts

Eigenfunction vs Eigenvector.

$\varphi'' + \lambda\varphi = 0$, $\varphi(x+2\pi) = \varphi(x)$ $\Rightarrow$ φ is an eigenfunction w/ eigenvalue λ.

$(A\varphi = -\lambda\varphi)$

$\Rightarrow$ Eigenfunctions & Eigenvalues.

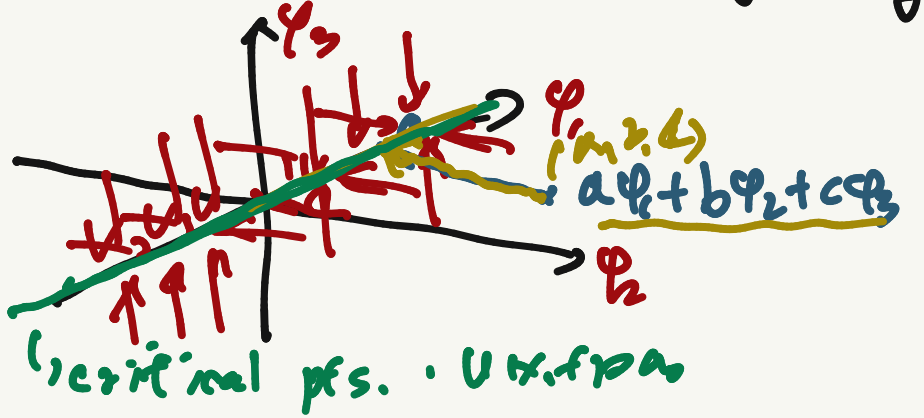
$\varphi'' + 0\cdot\varphi = 0 \;\; \lambda = 0$

$(1, 0)$, $(\sin\theta, 1)$, $(\cos\theta, 1)$, $(\sin 2\theta, 4)$, $(\cos 2\theta, 4)$, ...

$(\cos\theta)'' + 1\cdot\cos\theta = -\cos\theta + \cos\theta = 0$

φ_1 φ_2 φ_3

and linear combination of eigenfunctions of the same eigenvalue.



$$u(x,t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-m^2 t} \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{-m^2 t} \sin m\theta$$

pf) Let $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} fg\,dx$, $f, g \in L^2([0, 2\pi])$

$\Rightarrow \left\{ \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\varphi_1}, \underbrace{\frac{1}{\pi}\cos\theta}_{\varphi_2}, \underbrace{\frac{1}{\pi}\sin\theta}_{\varphi_3}, \frac{1}{\pi}\cos 2\theta, \cdots \right\}$

is an orthonormal basis of the L^2-space.

$\Rightarrow \varphi_{2m}'' + m^2\varphi_{2m} = 0, \quad \varphi_{2m+1}'' + m^2\varphi_{2m+1} = 0$ ✓

and $u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \langle u(x,t), \varphi_m\rangle \varphi_m$

$\frac{d}{dt}\langle u(x,t), \varphi_m(x)\rangle = \int_0^{2\pi} u_t\varphi_m = \int_0^{2\pi} u''\varphi_m = \int_0^{2\pi} -u'\varphi_m'$

$= \int_0^{2\pi} u\varphi_{2m}'' = -m^2\int_0^{2\pi} u\varphi_{2m} = -m^2\langle u(x,t), \varphi_{2m}(x)\rangle$

$\Rightarrow \langle u(x,t), \varphi_{2m}(x)\rangle = e^{-m^2t}\langle u(x,0), \varphi_{2m}(x)\rangle$ ↓ a_{2m} □.

Thm) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bound open set.

$u_t = \Delta u + V(x) u(x,t)$ holds in $\Omega \times (0,T)$ — (*1)

$u = 0$ " on $\partial\Omega \times (0,T)$

$\Rightarrow u = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m t} \varphi_m(x)$.

where $\{\varphi_1, \cdots\}$ is an orthonormal basis of $L^2(\Omega)$

$\varphi_m'' + \lambda_m \varphi_m = 0$. $\varphi_m = 0$.

Thm) $\varphi_m > 0 \iff m = 1$.

Ex) $u_t = u'' + qu$, $u(0,t) = u(2\pi,t) = 0$

$$E(u) = \int_0^{2\pi} u'^2 - q u^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}E = 2\int u'u_t' - q u u_t = -2\int u_t(u'' + qu)$$

$$= -2\int u_t^2 \le 0.$$

Eigenpairs $(1,-q)$, $(\cos\theta,-\theta)$, $(\sin\theta,-\theta)$ — unstable

$(\cos 2\theta,-4)$, $(\sin 2\theta,-4)$

$(\cos 3\theta, 0)$, $(\sin 3\theta, 0)$ — neutral

$(\cos 4\theta, 7)$, $(\sin 4\theta, 7)$, ... — stable

$u_0 = \cos\theta \Rightarrow u(\theta,t) = e^{\theta t}\cos\theta \to \infty$ as $t \to +\infty$.

Very important remark!

ancient

Suppose $|u| \le C$ for $t \in (-\infty, 0]$. (V solution to Or)

Then. $u(x,t) = \sum_{m=1}^{I+k} a_m e^{-\lambda_m t} \varphi_m(x)$. ← finite parameter family of ancient sol

where $\lambda_1 < \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_I < 0$

I : Morse index

$0 = \lambda_{I+1} = \cdots = \lambda_{I+k}$,

k : nullity.

$0 < \lambda_{I+k+1} \le \lambda_{I+k+2} \le \cdots$

Ancient mean curvature flow



($\sqrt{-t}\Sigma$ is MCF)

Given an ancient MCF M_t ($t \in (-\infty, T)$)
we consider the rescaled ancient flow $\tilde{M}_\tau$

$$\tilde{M}_\tau = \frac{1}{\sqrt{-t}} M_t, \quad \tau = -\log(-t)$$

Suppose that $\tilde{M}_\tau$ converges to Σ in C^k_{loc} ($k \geq 2$) as $\tau \to -\infty$.

Namely. $\exists\, u : \Sigma \times (-\infty, \tau_0) \to \mathbb{R}$ s.t.

$$x + u(x,\tau)\nu(x) \in \tilde{M}_\tau \quad \forall x \in \Sigma, \tau < \tau_0,$$

$$\|u(\cdot,\tau)\|_{C^k(\Sigma)} \to 0 \quad \text{as} \quad \tau \to -\infty.$$

Then, $u_\tau = Lu + E(u)$. where $|E(u)| \leq C\|u\|_{C^1}\|u\|_{C^2}$.

$$Lu = \Delta_\Sigma u - \frac{1}{2} x^{\tan} \cdot \nabla_\Sigma u + \left(|A_\Sigma|^2 + \frac{1}{2}\right) u.$$

Let $\langle f, g \rangle_w =: \int_\Sigma f g e^{-\frac{|x|^2}{4}}$. Then. $\langle Lf, g \rangle_w = \langle f, Lg \rangle_w$

$\Rightarrow \exists\ (\varphi_1, \lambda_1), \cdots$ s.t. $L\varphi_i + \lambda_i \varphi = 0$, $\lambda_i \to +\infty$ as $i \to +\infty$

$\operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\} = L^2_w(\Sigma) = \{f : \Sigma \to \mathbb{R} \mid \int_\Sigma f^2 e^{-\frac{|x|^2}{4}} < +\infty\}$

$\lambda_1 < \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_I < 0 = \lambda_{I+1} = \cdots = \lambda_{I+k} = 0 < \lambda_{I+k+1} \le \cdots$,

$\varphi_m > 0 \iff m = 1$.

Recall that an ancient sol $V_t = LV$ w/ $|V| \le C$ must be

$$V = \sum_{i=1}^{I} a_i e^{-\lambda_i t} \varphi_i(x) + \sum_{i=I+1}^{I+k} a_i \varphi_i(x). \quad -(*)$$

Since $u_t = Lu + E(u)$ $\approx$ $V_t = LV$, u would behave like $(*)$

$(\because |E(u)| \le C \|u\|_{C^1} \|u\|_{C^2})$

[CM19] ① If $|u| \le e^{\delta\tau}$, then $\lim_{\tau\to-\infty} u e^{\lambda_i \tau} = \varphi$ for some $i \le m$ and $L\varphi + \lambda_i \varphi = 0$.

① If u^1, u^2 are in the case $\lambda_\ell = \lambda_i$, $u^1(\cdot,\tau) = u^2(\cdot, \tau + A)$ for some $A \neq 0$

② $\exists$ continuous map $S : B_2(0) \subset \mathbb{R}^I \to C^\infty(\Gamma \times (-\infty, 0))$ s.t. $u_{\vec{a}} = S(\vec{a})$ solves $\partial_\tau u_{\vec{a}} = L u_{\vec{a}} + E(u_{\vec{a}})$

③ If an ancient solution u does not satisfies $|u| \le e^{\delta\tau}$ $\forall \delta > 0$, then $\lim_{\tau\to-\infty} \frac{u}{\|u\|_w} = \varphi$ for some $L\varphi = 0$.

ADS 19, ADS 20) The case that such φ in ③ exists.

CS20a, CS20b) // // does NOT exist.

Remark) If $\lambda_i = \lambda_1$, then $u \approx a e^{\lambda_1 \tau} \varphi_1$

$\Rightarrow u_1, u_2 > 0$ or $u_1, u_2 < 0$.

(or) If $u>0 \quad \forall\, \tau<\tau_0$,

then $\lim_{\tau\to-\infty} e^{\lambda_1\tau} u = a\varphi_1$ (up to O) for some $a>0$.

Namely, if M_τ stays in the one-side of Σ,

then (**) holds.

Fact) $LH + H = 0$, $Lx^\Sigma + \frac{1}{2}x^\Sigma = 0$, where $x^i = \langle X, e^i\rangle$

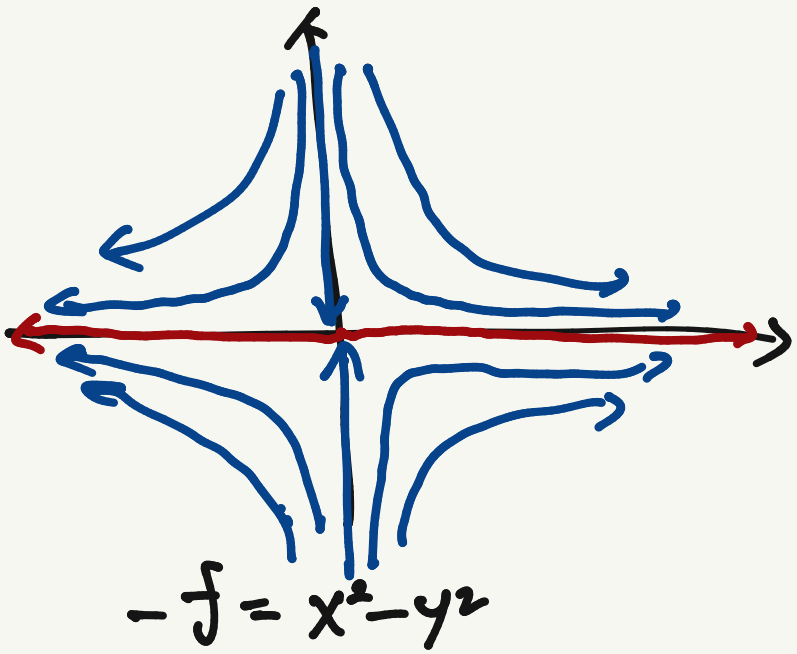
$\Rightarrow \exists\,(n+2)$-unstable eigenfunction.

What is the geometric meaning?

$M_t = a\sqrt{-t}\,\Sigma$ w/ $1\neq a>0 \Rightarrow \quad u e^{-\tau} \to bH_\Sigma$

$M_t = \sqrt{-t}\,(\Sigma + y)$ w/ $y\neq 0 \Rightarrow \quad u e^{-\frac{\tau}{2}} \to a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$.

i.e. Ancient flows along H or x^i are shrinking flow.



Hence, ancient flows escape from the critical point.

$\Rightarrow$ Ancient rescaled MCFs escape from shrinkers.

+ Ancient RMCFs along H, x^i (trivial unstable eigenfunc) has the same shape to shrinkers.

Ancient (negative) gradient flow

$$X(t) = (ae^{2t}, 0)$$

$$\Rightarrow \dot{X} = \begin{pmatrix} 2ae^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} = -Df(X(t))$$

$\Rightarrow$ We can expect that a shrinker Σ w/ non-trivial unstable eigenfunctions is unstable.

Def) Suppose that H, x^i are the only unstable eigenfunctions of $\mathcal{L}$ over Σ. Then, we say Σ is linearly stable.
otherwise, Σ is linearly unstable

Classification of linearly stable 4D Ricci shrinkers remains open.

(CM 12) Round S^n, $S^{n-1} \times \mathbb{R}^1$, ..., $S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, and hyperplane $\mathbb{R}^n$ are the only linearly stable shrinkers

c.f. HS 99)

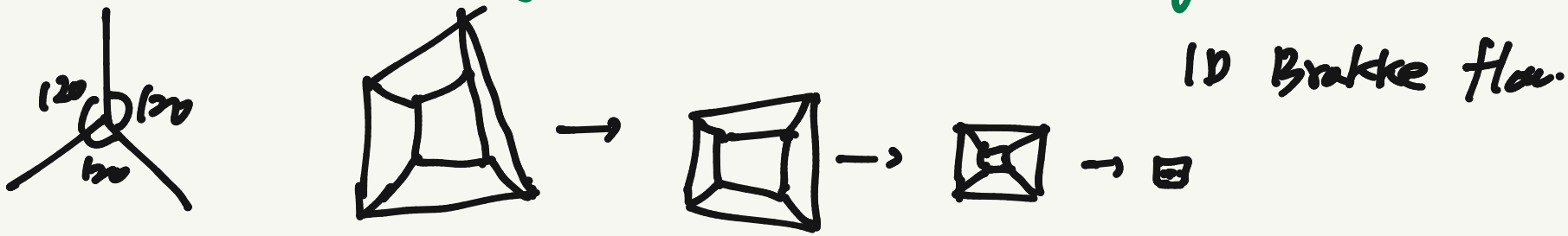
Remark) The first eigenvalue of linearly stable Σ is $\frac{1}{2}$.
Thus, $H > 0 \Leftrightarrow \Sigma$ is linearly stable

Huisken conjecture) Given a closed smooth embedded hypersurface $M_0 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, there exist ε-graph N_0 over M_0 such that the Brakke flow N_t only has multiplicity one round sphere or round cylinder singularities.

The Brakke flow is a weak mean curvature flow which is NOT necessarily C^∞ and can have singularies.

c.f. Ch 9. Gilbarg-Trudinger.

Ex)



1D Brakke flow.

Q) Does the Brakke flow is well-posed (well-defined) through the multi-1 cylindrical singularities ??

Mean convex neighborhood conjecture)

Suppose that at $(X_0, t_0) \in M_t$, a Brakke flow has multi-1 round spherical or round cylindrical singularity. Then, $\exists\ \varepsilon > 0$ s.t. M_t has the positive mean curvature in $B_\varepsilon(X_0) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$?

HW20) The conjecture implies the well-posedness in the nbh.
And if every limit flow at (X_0, t_0) is convex, then the conjecture is true.

Def) Limit flow at (X_0, t_0)

Let $(X_i, t_i, \lambda_i) \to (X_0, t_0, +\infty)$

Then. any subsequential limit

$$\bar{M}_t = \lim_{i \to +\infty} \lambda_i \left(M_{\lambda_i^2 (t - t_i)} - X_i \right)$$

is a limit flow at (X_0, t_0) of M_t.

Remark) limit flow is an ancient flow.

Def) If $(X_i, t_i) = (X_0, t_0)$, then we call the limit flow

a tangent flow

(c.f. tangent cone)

Thm) Every tangen flow $\tilde{M}_t$ w/ RMCF $\tilde{M}_t$
Converges to a shrinker w/ multiplicity

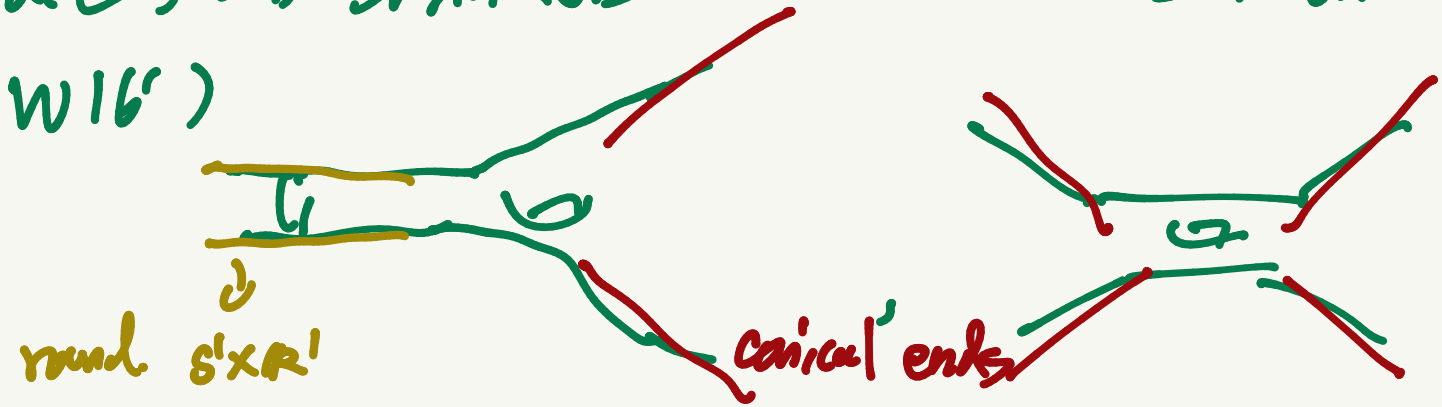
All the tangent flows at $(x_0, t_0) \in M_t$ are the same
up to rotation.

Remark) Uniqueness of tangent flow
$\Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} \sqrt{t_0 - t}\,(M_t - x_0) = \Sigma$ w/ multi.-m.

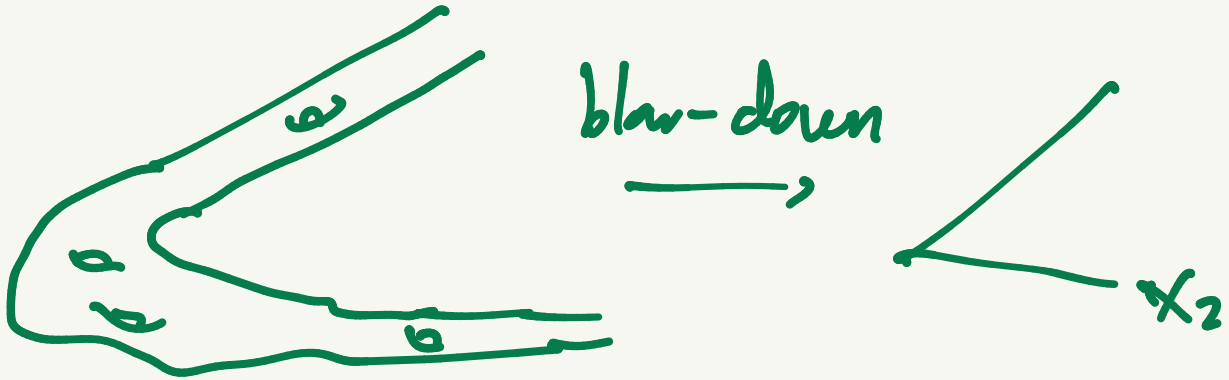
Multi-one case) S 14': closed shrinkers
CM 15': round cylinders
CS 19': Asymptotically conical shrinkers.

Fact) 2D shrinkers in $\mathbb{R}^3$ is smooth

w/ (')



Every end of 2D shrinker must be asymptotically round cylinder or cone. w/ multi. $= 1$.



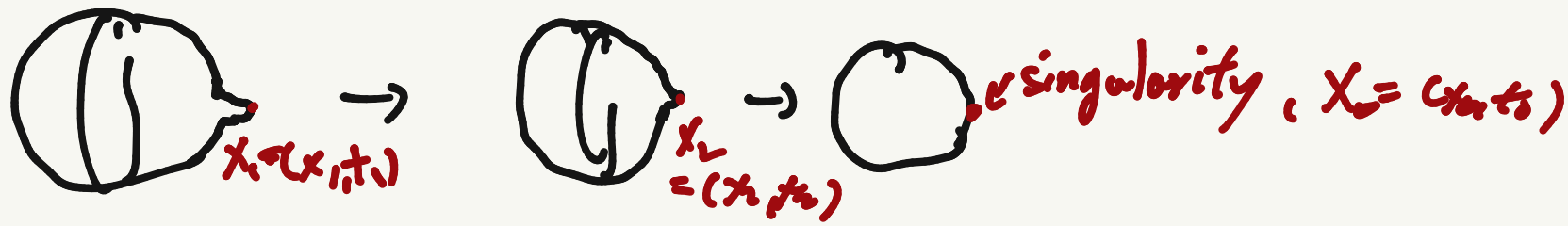
No. cylinder conjecture) If a 2D shrinker has at least one cylindrical end, then it must be the round $S^1 \times \mathbb{R}^1$.

C.f. W 14', W 16'

Remark) So, we expect that a 2D shrinker must be closed, round cylinder, or asymptotically conical.

Limit flow ≠ tangent flow

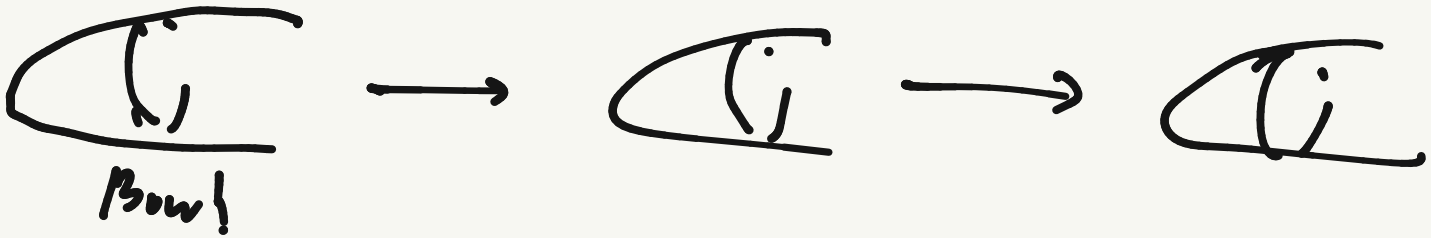
Degenerated neck) Aw 94!



Tangent flow at X_0 is round cylinder

Limit flow along X_i is a bowl soliton

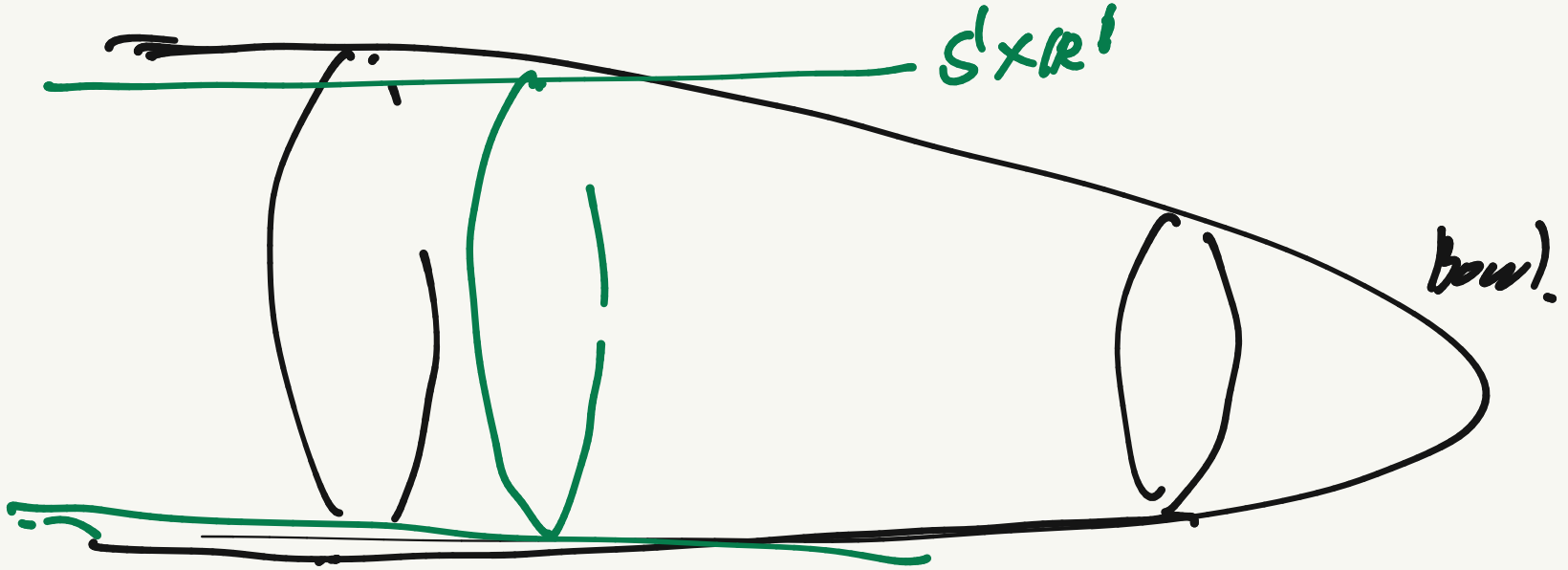
Bowl soliton is a TRANSLATING flow w/ rot. sym.



Remark) Let M_t be a bowl soliton

$\tilde{M}_\tau = (-t)^{-1/2} M_t$, $\tau = -\log(-t)$ is RMCF.

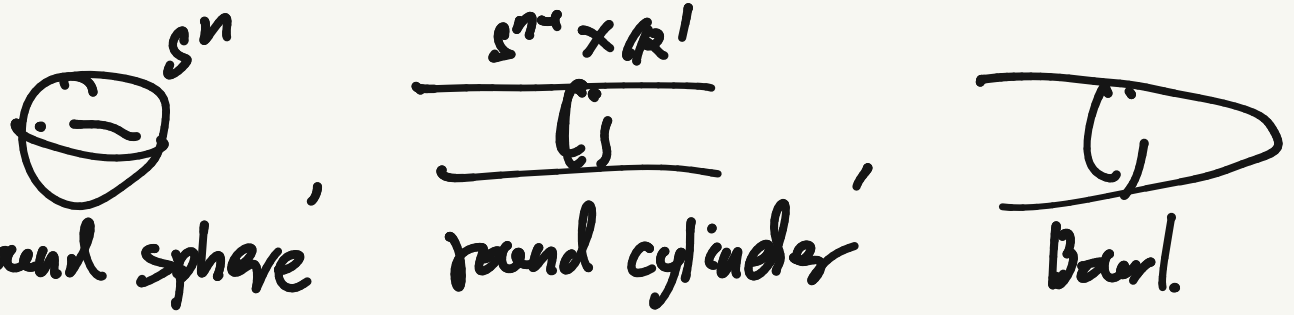
$\Rightarrow \tilde{M}_\tau \to \boxed{\Omega}$ round cylinder as $\tau \to -\infty$



(HH18') The mean convex neighborhood conjecture is true in $\mathbb{R}^3$

(HHW'19') The conjecture is true at S^n, $S^{n-1}\times\mathbb{R}^1$ singularities in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Snapshot of proof) A ancient flow from $S^{n-1}\times\mathbb{R}^1$ must be



round sphere, round cylinder, Bowl

or



Ancient oval.

$\Rightarrow$ convex & rotationally symmetric

CM 15') uniqueness of tangent flow at cylindrical sing.

W 05') Local regularity theory.

ADS 19'.20') classification of convex, uniformly 2-convex. non-collapsed ancient flow

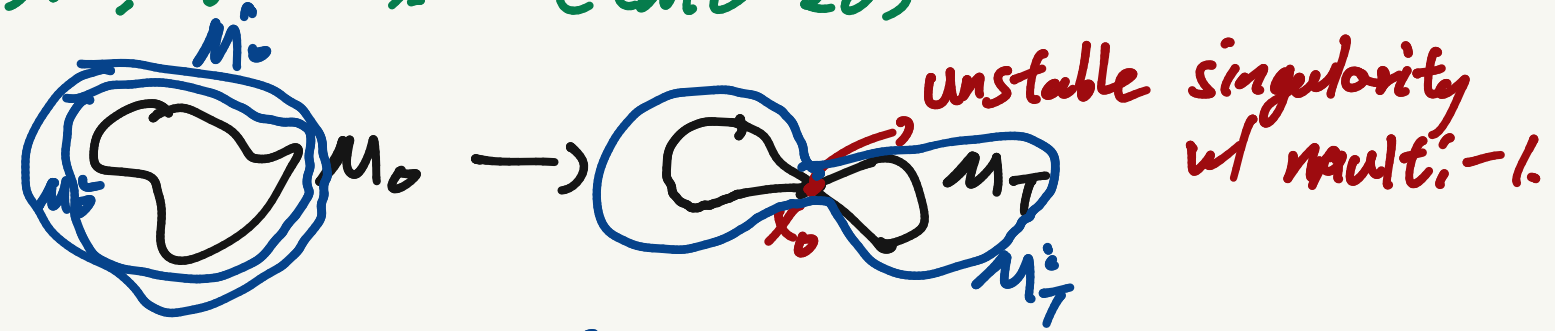
$\Rightarrow$ 

Bc 18', 19') class of conv. 2-convex. n-c, ancient flow

$\Rightarrow$ 

Avoidance principle at closed or asymptotically conical singularity w/ multi-one.

(W. 16-20) (CMS 20)



① Consider a seq $M_0^i \to M_0$ such that M_0^i encloses M_0^{i+1}

$\Rightarrow M_t^i \cap M_t = \emptyset$ for $t < T$ by max. prin.

② Consider a subsequential limit $\lambda_i (M^i_{\lambda_i^2(t_0 - t)} - x_0) = \bar{M}_t$

Then, $\bar{M}_t \cap \sqrt{-t}\,\Sigma = \phi$.

(∵ $\sqrt{-t}\,\Sigma$ is the tangent flow of M_t)

Namely, $\bar{M}_t$ is one-sided flow

⇒ RMCF $\hat{M}_\tau$ is the graph of $u : \Sigma \times (-\infty, T) \to \mathbb{R}$

such that $u > 0$

⇒ $\lim_{\tau \to -\infty} e^{\lambda_1 \tau} u = a\varphi_1$ for $a > 0$

⇒ $u_\tau > 0 \iff H - \frac{1}{2}\langle X, \nu \rangle > 0$

⇒ By Hu 20'. M_τ has multi-1 round spherical or cylindrical singularity.

Reference

ADS 19) Angenent - Daskalopoulos - Sesum.
JDG, 2019

ADS 20) Angenent - Daskalopoulos - Sesum
Annals of math. 2020

AW 94) Angenent - L. Wu
Carl. Var. PDE, 1994.

B 13) Brendle. Invent. Math, 2013

BC 18) Brendle - K. Choi
arXive. 2018

BC 19) Brendle - K. Choi
Invent. math. 2019.

BH 16) Brendle - Huisken
Invent. Math. 2016.

BHH 16) Buzano - Haslhofer - Hershkovits
arXive. 2016

BW 16) Bernstein - L. Wang
Invent. math. 2016

BW 17a) arXiv, 17
BW 17b) Duke, 17
BW 18a) Math. Res. Lett 18
BW 18b) arXiv, 18
BW 18c) "
BW 18d) G & T. 18
BW 19a) arXiv, 19
BW 19b) " , 19
BW 20) " , 20??
CHH 18) K. Choi - Haslhofer - Hershkovits
arXiv, 2018
CHHW 19) CHH - B. White. 2019
CHN 13) Cheeger - Haslhofer - Naber
GAFA, 2013,
CIMW 13) Colding - Ilmanen - Minicozzi
- B. White, JDG 2013'
CM 12) Colding - Minicozzi,
Annals of math. 2012
CM 15) Colding - Minicozzi,
Annals of math. 2015

CM16) Colding-Minicozzi
Invent. math. 2016
CM19) K. Choi - mantoulidis,
arXiv, 2019.
CS19) Chodosh - Schulze,
arXive. 2019
HK17a) Haslhofer - Kleiner
CPAM, 2017
HK17L) ", Duke math. 2017
HS99) Huisken - Sinestrari,
Acta Math. 1999
HS09) ", Invent. Math, 2009.
H84) Huisken, JDG. 1984
H90) ". JDG, 1990
HW20) Hershkovits - B. White.
CPAM. 2020
S14) Schulze, Crelle's, 2014
S08) Sesum, CPAM, 2008

W11) X. Wang · Annals of math. 2011
W14) L. Wang, JAMS, 2014
W16) " . arXive. 2016
W00) B. White, JAMS, 2000
W03) " , " , 2003.
W05) . " , Annals of Math. 2005
Z20), J. Zhu. JDG, 2020
G18) Z. Gang, arXive, 2018
LW18) H.Z. Li - B. Wang.
arXiv 2018.
LW19) " , Invent math. 2019.

Geometric inequalities and inverse mean curvature flow

Beomjun Choi

University of Toronto

KIAS Geometry Winter School

How much area a fixed lenghted curve could contain?

Theorem (Isoperimetric inequality)

Let $C = \partial\Omega$ be a closed and embedded curve in $\mathbb{R}^2$. Then

$$4\pi A \leq L^2$$

and the equality holds iff C is a round circle.

Long history with many different proofs.

Today we focus on a proof which uses the curvature flow and its implications on the concept of mass in general relativity.

Curve shortening flow

Each point on a curve moves with the velocity of its curvature vector.

More precisely, 1-parameter family of immersions

$$F : \mathbb{S}^1 \times [0, T] \to \mathbb{R}^2$$

is a solution to the CSF if

$$\frac{\partial}{\partial t} F(p, t) = \vec{k}(p, t).$$

Theorem (Gage-Hamilton '86)

Convex embedded curve shrinks to a point and becomes round.

Theorem (Grayson '87)

Embedded curve becomes convex in finite time.

Computer simulations

If $\vec{k} = k\vec{n}$ with the inner unit normal $\vec{n}$,

$$\partial_t A = -\int k ds = -2\pi$$

and by the first variation formula of area (length)

$$\partial_t L = -\int k^2 ds.$$

More generally, $M_t^n = \partial\Omega_t$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ evolves by the velocity $S\vec{n}$,

$$\partial_t \mathrm{Vol}(\Omega_t) = -\int_{M_t} S dV_g$$

$$\partial_t |M_t^n| = -\int_{M_t} SH dV_g.$$

Proof of isoperimetric inequality

Let C_0 be given curve and C_t be the CSF which converges to a round point as $t \to t_{\max}$.

$$\begin{aligned}\partial_t(L^2 - 4\pi A) &= -2L \int k^2 ds + 8\pi^2 \\ &\leq -2\left(\int k ds\right)^2 + 8\pi = 0\end{aligned}$$

Since $L^2 - 4\pi A \to 0$ as $t \to t_{\max}$ by Grayson,

$$L^2 \geq 4\pi A \quad \text{at} \quad t = 0$$

and the equality case easily follows.

Generalizations into two directions

- Non-Euclidean ambient space
- Higher dimensions

Theorem

For simply connected manifold (M^2, g) w/ Gaussian curvature $K \leq K_0$,

$$L^2 \geq 4\pi A - K_0 A^2$$

and the equality is attained for geodesic spheres which enclose constant curvature K_0 regions.

The more curved, the more area could be bounded. This suggests an idea that the isoperimetric constant or profile could be used to measure how much space is curved.

Higher dimensions

Theorem

Let M^n be the boundary of the region $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Then,

$$\mathrm{Vol}(\Omega) \leq C_n |M^n|^{\frac{n+1}{n}}$$

and the equality holds iff Ω is a round ball.

Let $M_t^n = \partial\Omega_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$ be a solution to the mean curvature flow.
i.e. velocity $= H\vec{n}$, $H = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

$$\begin{aligned}\partial_t(C_n A^{\frac{n+1}{n}} - V) &= -\frac{n+1}{n} C_n A^{\frac{1}{n}} \int_{M_t} H^2 + \int_{M_t} H \\ &\leq \left[1 - \frac{(n+1)C_n}{n} \frac{\int_{M_t} H}{A^{\frac{n-1}{n}}}\right] \int_{M_t} H\end{aligned}$$

Suppose we have the following:

1. $\int_M H \geq \frac{n}{(n+1)C_n}|M|^{\frac{n-1}{n}}$
2. $|M_t| \to 0$ and $\mathrm{Vol}(\Omega_t) \to 0$ as $t \to T_{\max}$.

Then we have the isoperimetric inequality

$$C_n|M_0|^{\frac{n+1}{n}} - \mathrm{Vol}(\Omega_0) \geq \lim_{t \to T_{\max}} C_n A^{\frac{n+1}{n}} - V = 0.$$

Note we have $\frac{n}{(n+1)C_n} = n|\partial B_1|^{\frac{1}{n}}$ and (1) is called the Minkowski inequality in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Theorem (Minkowski 1903, Alexandrov '37 and others)

For convex hypersurfaces,

$$\int_M H \geq n|\partial B_1|^{\frac{1}{n}}|M|^{\frac{n-1}{n}}$$

with the equality iff round spheres.

- For mean convex star-shaped hypersurfaces, by Guan-Li '09
- For outward area minimizing hypersurfaces, by Huisken (unpublished)
- Open for general mean convex hypersurfaces

Theorem (Huisken '84)

Compact convex embedded hypersurface shrinks to a point and becomes round in finite time.

Another approach H^k-flow by F. Schulze ('08)

Consider the flow with the velocity $H^k \vec{n}$.

$$\partial_t (C_n A^{\frac{n+1}{n}} - V) = -\frac{n+1}{n} C_n A^{\frac{1}{n}} \int_{M_t} H^{k+1} + \int_{M_t} H^k$$

Meanwhile we play with Hölders

$$\int H^k \leq A^{\frac{1}{k+1}} \left(\int H^{k+1} \right)^{\frac{k}{k+1}}$$

and (if $k+1 \geq n$)

$$\left(\int H^n \right)^{\frac{1}{n}} \leq A^{\frac{1}{n} - \frac{1}{k+1}} \left(\int H^{k+1} \right)^{\frac{1}{k+1}}$$

imply

$$\int H^k \leq A^{\frac{1}{n}} \left(\int H^n \right)^{-\frac{1}{n}} \int H^{k+1}$$

$$\partial_t(C_n A^{\frac{n+1}{n}} - V) \leq A^{\frac{1}{n}} \int H^{k+1} \left(\left(\int H^n \right)^{-\frac{1}{n}} - \frac{n+1}{n} C_n \right)$$

Theorem (Willmore inequality)

For immersed hypersurfaces

$$\int \left(\frac{H}{n} \right)^n \geq A(\partial B_1)$$

and the equality iff round spheres.

implies

$$\partial_t(C_n A^{\frac{n+1}{n}} - V) \leq 0$$

Level set weak flow

Let $M_t = \partial\Omega_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ be a solution to H^k-flow with $H > 0$.
If $u(x) :=$ the time t when M_t arrives at x, then

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = -|\nabla u|^{-\frac{1}{k}} & \text{on } \Omega_0 \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega_0 \end{cases}$$

- Weak formulation of flows defined through singularities
- Evans-Spruck and Chen-Giga-Goto at '91

Inverse mean curvature flow - definition

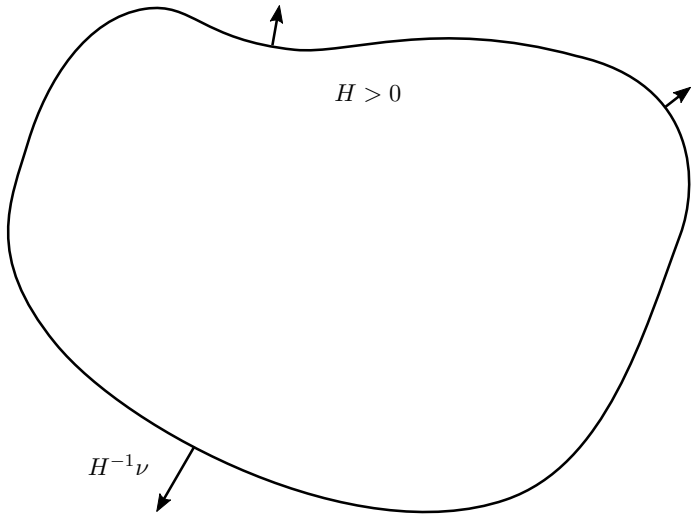
- A one-parameter family of mean convex embeddings $F(M^n, t) = M_t^n = \partial\Omega_t$

$$F : M^n \times [0, T] \to (\bar{M}^{n+1}, \bar{g})$$

is a solution to the inverse mean curvature flow if

$$\frac{\partial}{\partial t} F = \frac{\vec{\nu}}{H} \quad \text{on} \quad M^n \times [0, T].$$

Here $\vec{\nu}(p, t) :=$ outward unit normal.



Simple observations

- Expanding sphere solutions $\partial B_{R(t)} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $R(t) = e^{\frac{t}{n}} R(0)$
- $\partial_t d\text{vol} = d\text{vol} \to \partial_t |M_t| = |M_t|$, $|M_t| = e^t |M_0|$
- In $\mathbb{R}^{n+1}$, $M_t \to \lambda M_t$ produce another solution (unlike the mean curvature flow: $M_t \to \lambda M_{\frac{t}{\lambda^2}}$)

IMCF on compact hypersurfaces - background

- C. Gerhardt '90 and J. Urbas '90:
  If M_0 compact, smooth, star-shaped ($\langle F, \nu \rangle > 0$) and strictly mean convex, then smooth solution exists for $t \in (0, \infty)$ and converges to a spherical solution after a rescaling.

- For non star-shaped case, singularities may develop.
  e.g. mean convex torus in $\mathbb{R}^3$.

- G. Huisken, T. Ilmanen '97
  Defined a variational weak solution of the flow using level sets, which allows jumps of the surfaces. They use this to prove Riemannian Penrose inequality in General Relativity for a single black hole case.

The Geroch monotonicity formula

Geroch- the Hawking quasi-local mass of a connected 2-surface in a manifold of nonnegative scalar curvature is non-decreasing under the IMCF. For 2-surface M in $(\bar{M}^3, \bar{g})$,

$$m_H(M) := \frac{|M|^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left(16\pi - \int_M H^2\right).$$

Proof: Since $|M_t| = e^t |M_0|$, $\partial_t |M_t|^{1/2} = \frac{1}{2}|M_t|^{1/2}$

$$\partial_t m_H(M_t) = \frac{|M_t|^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left[\frac{1}{2}\left(16\pi - \int_M H^2\right) - \partial_t \int_{M_t} H^2\right]$$

Note $\partial_t H = -\Delta \frac{1}{H} - \frac{|A|^2}{H} - \frac{\overline{Ric}(\nu,\nu)}{H}$ and $\partial_t dvol = dvol$ imply

$$(*) \quad \partial_t \int_{M_t} H^2 = \int_{M_t} -2H\Delta\frac{1}{H} - 2|A|^2 - 2\overline{Ric}(\nu,\nu) + H^2.$$

Recall the Gauss equation

$$Rm_{ijkl} = \overline{Rm}_{ijkl} + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk})$$
$$\Rightarrow K = R_{1212} = \overline{Rm}_{1212} + \lambda_1\lambda_2 = \overline{Rm}_{1212} + \frac{1}{2}(H^2 - |A|^2).$$

In dim 3, $\frac{1}{2}\overline{R} = \overline{Ric}(\nu,\nu) + \overline{Rm}_{1212}$ and we get

$$-2\overline{Ric}(\nu,\nu) = -\overline{R} + 2K + |A|^2 - H^2.$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_{M_t} H^2 &= \int_{M_t} -2\frac{|\nabla H|^2}{H^2} - |A|^2 - \overline{R} + 2K \\
&= 4\pi\chi(M_t) + \int_{M_t} -2\frac{|\nabla H|^2}{H^2} - |A|^2 - \overline{R} \\
&\leq 8\pi - \int_{M_t} |A|^2 \quad (\chi(M_t) \leq 2 \text{ since } M_t \text{ is connected }) \\
&= 8\pi - \int_{M_t} \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\left(16\pi - \int_{M_t} H^2\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_t m_H(M_t) \geq 0.$$

Isolated gravitating system in general relativity

Definition (Asymptotically flat manifold)

A complete manifold $(\bar{M}^3, \bar{g})$ is asymptotically flat (with order $\tau \in (1/2, 1]$) if there is a compact set $K \subset \bar{M}$ and a diffeomorphism

$$\phi : \mathbb{R}^3 - B_R(0) \to \bar{M}^3 - K$$

such that $\phi^* g = \delta_{ij} + \sigma_{ij}$ satisfies

$$|\sigma| + r|\partial\sigma| + r^2|\partial\partial\sigma| + r^3|\partial\partial\partial\sigma| \leq O(r^{-\tau})$$

Definition (ADM mass)

$$m_{ADM}(\bar{M}, \bar{g}) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{16\pi} \int_{\partial B_r(0)} (g_{ij,i} - g_{ii,j})\nu^j dV_{g_{euc}}$$

Schwarzschild metric

Schwarzschild metric of mass $m > 0$ is

$$(\mathbb{R}^3 - \{0\}, \big(1 + \frac{m}{2|x|}\big)^4 \delta_{ij})$$

and note that

- $r = \frac{m}{2}$ is a totally geodesic sphere and is called (apparent) horizon
- $A(\{r = \frac{m}{2}\}) = 16\pi m^2$
- no compact minimal surface in $\{r > \frac{m}{2}\}$
- $m_{ADM} = m$.

Theorem (Riemannian Penrose inequality)

Let $(\bar{M}^3, \bar{g})$ be an asymptotically flat mfd with nonnegative scalar curvature with minimal boundary $M_0 = \partial\bar{M}$ and no other compact minimal surface in $\bar{M}$. Then

$$m_{ADM} \geq \sqrt{\frac{|M_0|}{16\pi}}.$$

Theorem (Riemannian Penrose inequality)

Let $(\bar{M}^3, \bar{g})$ be an asymptotically flat mfd with nonnegative scalar curvature with minimal boundary $M_0 = \partial\bar{M}$ and no other compact minimal surface in $\bar{M}$. Then

$$m_{ADM} \geq \sqrt{\frac{|M_0|}{16\pi}}.$$

Heuristic Proof: Let M_t IMCF from M_0. By the monotonicity

$$m_H(M_t) \geq m_H(M_0) = \frac{|M_0|^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left(16\pi - \int_{M_0} H^2\right) = \sqrt{\frac{|M_0|}{16\pi}}.$$

It is known that the Hawking mass of sufficiently round (coordinate) spheres at infinity approaches to the ADM mass. If we show M_t becomes sufficiently round spheres at infinity,

$$m_{ADM} = \lim_{t\to\infty} m_H(M_t) \geq \sqrt{\frac{|M_0|}{16\pi}}.$$

Properties of weak solution

For $M_0 = \partial\Omega_0$,

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = |\nabla u| & \text{on } \Omega_0^c \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega_0 \end{cases}$$

and $M_t = \partial\{u < t\}$.

- Ω_t is outward area minimizing in the sense that

$$\Omega_t \subset \Omega' \Longrightarrow |\partial\Omega_t| \leq |\partial\Omega|$$

- $|M_t| = e^t |M_0|$

Isoperimetric profile and m_{ADM}.

For Schwarzschild of mass m, $(\mathbb{R}^3 - \{0\}, \left(1 + \frac{m}{2|x|}\right)^4 \delta_{ij})$, the isoperimetric profile is the function

$$\begin{aligned} \phi_m : [16\pi m^2, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ |\partial B_r(0)| &\longmapsto \mathrm{Vol}(B_r(0) - B_{\frac{m}{2}}(0)) \end{aligned}$$

Key observation

$$\phi_m(A) = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} A^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} mA + O(A^{\frac{1}{2}}) \text{ as } A \to \infty.$$

This motivates the following

Definition

$$m_{iso}(\bar{M}^3, \bar{g}) = \limsup_{|\partial\Omega|\to\infty} \frac{2}{|\partial\Omega|}(\mathrm{Vol}(\Omega) - \frac{1}{6\sqrt{\pi}}|\partial\Omega|^{\frac{3}{2}})$$

Theorem (Huisken, unpublished)

$$m_{iso}(\bar{M}, \bar{g}) = m_{ADM}(\bar{M}, \bar{g})$$

The proof uses both MCF and IMCF.

Key tool

Theorem (J.L.Jauregui-D.A.Lee, Huisken)

Under the MCF M_t, if $m_H(M_t) \leq m'$, then

$$\phi_{m'}(A(t)) - V(t) \text{ is decreasing in } t.$$

Recall in isoperimetric inequality,

$$\left(\int_M H^2\right)^{1/2} \geq \Lambda \text{ for all } M \quad \Longrightarrow \quad \partial_t \left(\frac{2}{3}\frac{A^{\frac{3}{2}}}{\Lambda} - V\right) \leq 0.$$

$$\begin{aligned} V(0) - \frac{A(0)}{6\sqrt{\pi}} &\leq \phi_{m'}(A(0)) - \frac{A(0)}{6\sqrt{\pi}} - [\phi_{m'}(A(t)) - V(t)] \\ &\leq \phi_{m'}(A(0)) - \frac{A(0)}{6\sqrt{\pi}} + v \end{aligned}$$

implies

$$m_{iso} \leq m'$$

Other applications

By similar arguments, the flow (classical or weak) has been used in the proofs of other geometric inequalities as well.

- Guan-Li Minkowski ineq for non-convex hypersurface in $\mathbb{R}^{n+1}$
- Brendle-Hung-Wang Minkowski ineq for Anti-deSitter Schwarzschild manifold
- Lee-Neves Penrose type ineq for asymptotically locally hyperbolic space
- De Lima-Girão, Ge-Wang-Wu Alexandrov-Fenchel ineq for different ambient spaces
- Bray-Neves another important application to the classification of prime 3-manifolds with Yamabe invariant greater than $\mathbb{RP}^3$.

Regularity of compact star-shaped solutions

Theorem (Huisken-Ilmanen '08, H^{-1} estimate)

Suppose $F : M^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n+1}$ is a smooth star-shaped IMCF such that on M_0^n

$$0 < R_1 \leq \langle F, \nu \rangle \leq R_2.$$

Then there is $c_n > 0$ such that for $t > 0$

$$\frac{1}{H} \leq c_n \left(\frac{R_2}{R_1}\right) \max\left(1, \frac{1}{t^{1/2}}\right) |M_0^n|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{t}{n}}.$$

- Estimate does not depend on initial bound on H^{-1} or $|A|^2$
- Uses only initial bounds of the support function $\langle F, \nu \rangle$

Theorem (Smoczyk ($n = 2$) '00, Huisken-Ilmanen '08)

Let $F : M^n \times [0, T] \to \mathbb{R}^{n+1}$ be a smooth compact sol of IMCF.

$$\text{If } 0 < H_0 \leq H \leq H_1, \text{ then } |A|^2 \leq c_n \frac{H_1^2}{H_0} \frac{1}{t}.$$

- $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\Delta H}{H^2} - \frac{2|\nabla H|^2}{H^3} - \frac{|A|^2}{H} = \nabla \cdot (H^{-2} \nabla H) - \frac{|A|^2}{H}$
- Huisken-Ilmanen showed the existence of smooth sol when M_0 is C^1, compact, star-shaped and has bounded non-negative (weak) mean curvature.

Non-compact solutions in $\mathbb{R}^{n+1}$

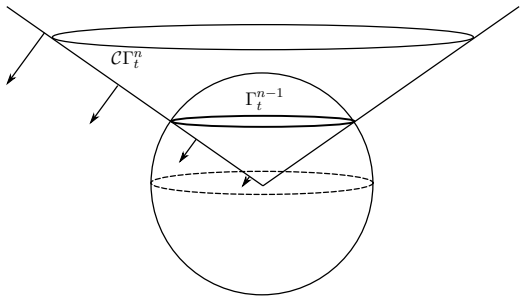
An important observation

Example

If $\Gamma_t^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ is a IMCF, then the cones generated by Γ_t

$$\mathcal{C}\Gamma_t = \{rx \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, x \in \Gamma_t,\, r \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

is a IMCF which is smooth except the origin.



In simplest case, if $\mathcal{C}\Gamma_0 := \{(x, \tan\theta_0\,|x|)\}$ is a round cone, then

$$\mathcal{C}\Gamma_t := \{(x, \tan\theta(t)\,|x|)\} \text{ for } t \in [0, T^*) \text{ with } T^* = \ln \frac{\cos^{n-1} 0}{\cos^{n-1}\theta_0}.$$

Convex solutions in $\mathbb{S}^n$ and dualitiy

Theorem (Gerhardt '15, Makowski-Scheuer '16)

Let $\Gamma_0 \subset \mathbb{S}^n$ be smooth, strictly convex ($h_{ij} > 0$). There exist a unique smooth IMCF, Γ_t, for $t \in [0, T)$ and the Γ_t converges to an equator as $t \to T$. (Note $T = \ln |\mathbb{S}^{n-1}| - \ln |\Gamma_0^{n-1}|$)

Convex solutions in $\mathbb{S}^n$ and dualitiy

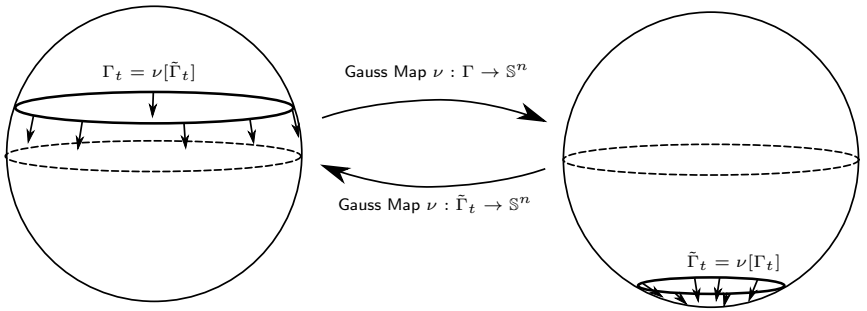
Theorem (Gerhardt '15, Makowski-Scheuer '16)

Let $\Gamma_0 \subset \mathbb{S}^n$ be smooth, strictly convex ($h_{ij} > 0$). There exist a unique smooth IMCF, Γ_t, for $t \in [0, T)$ and the Γ_t converges to an equator as $t \to T$. (Note $T = \ln|\mathbb{S}^{n-1}| - \ln|\Gamma_0^{n-1}|$)

Gerhardt - for strictly convex solutions of $F(\lambda_i)$ flow in $\mathbb{S}^n$

$$\begin{aligned} &\Gamma_t \subset \mathbb{S}^n \\ &x_t = F(\lambda_i)\nu \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} &\tilde{\Gamma}_t = \nu[\Gamma_t] \subset \mathbb{S}^n \\ &\tilde{x}_t = -\tilde{F}(\tilde{\lambda}_i)\tilde{\nu} \end{aligned}$$

with $\tilde{F}(\tilde{\lambda}_i) = F(\tilde{\lambda}_i^{-1})$.



Non-compact solutions in $\mathbb{R}^{n+1}$ - first result

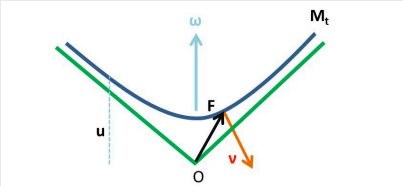
Theorem (Daskalopoulos-Huisken '17)

For $n \geq 2$, let $M_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ be C^2 convex entire graph $x_{n+1} = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ with:

(i) $\alpha_0 |x| < u_0(x) < \alpha_0 |x| + \kappa$ *for some* $\alpha_0 > 0$ *and* $\kappa > 0$

(ii) $0 < c_0 < H\left(\langle F, e_{n+1}\rangle + 1\right) < C_0$.

Then, there exists unique smooth IMCF M_t for $0 < t < T$ with $T = (n-1)\ln\sqrt{1+\alpha_0^2}$ and M_t becomes flat as $t \to T$.



Solution no longer has a uniform lower bound of H, and hence local estimate of H^{-1} was essential. Long time existence was a hard part as $H|F|$ (or $H\langle F, e_{n+1}\rangle$) vanishes as $t \to T$ and they had to capture this behavior.

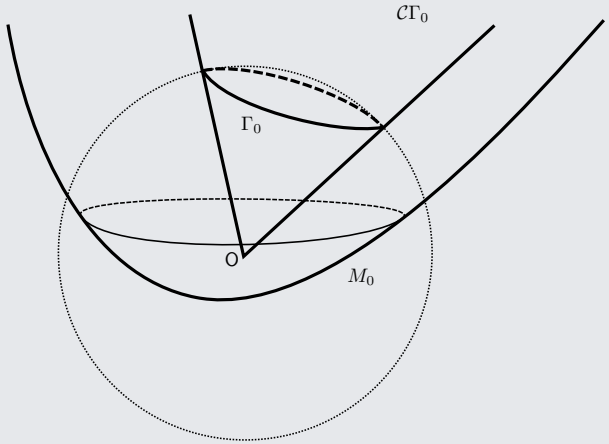
Non-compact solutions in $\mathbb{R}^{n+1}$ - main existence result

Definition (Tangent cone at infinity)

Let $M_0 = \partial \hat{M}_0$, $\hat{M}_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ non-compact convex set (containing the origin). Then

$$\cap_{\epsilon>0} \epsilon \hat{M}_0 = \mathcal{C}\hat{\Gamma}_0 \text{ for some convex set } \hat{\Gamma}_0 \subset \mathbb{S}^n.$$

We call it the tangent cone of $\hat{M}_0$ at infinity. $\Gamma_0 := \partial \hat{\Gamma}_0$ in $\mathbb{S}^n$ and we call $\mathcal{C}\Gamma_0$ the tangent cone of $M_0 := \partial \hat{M}_0$ at infinity.



Motivated from the previous observation and the scaling property of the flow, we prove

Theorem (C.-Daskalopoulos '18)

For convex $M_0 = \partial \hat{M}_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, IMCF M_t exists for $t \in (0, T)$.

- *Using $P(\hat{\Gamma}_0) :=$ the perimeter of $\hat{\Gamma}_0$ in $\mathbb{S}^n$,*

$$T = \ln |\mathbb{S}^{n-1}| - \ln P(\hat{\Gamma}_0) \in [0, \infty]$$

  and it is maximal. i.e. no smooth solution exists for $t > T$.
- *Let $\mathcal{C}\Gamma_t :=$ the tangent cone of M_t at infinity. Then $\Gamma_t \subset \mathbb{S}^n$ is IMCF in $\mathbb{S}^n$ becoming flat as $t \to T$.*

Motivated from the previous observation and the scaling property of the flow, we prove

Theorem (C.-Daskalopoulos '18)

For convex $M_0 = \partial \hat{M}_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, IMCF M_t exists for $t \in (0, T)$.

- *Using $P(\hat{\Gamma}_0) :=$ the perimeter of $\hat{\Gamma}_0$ in $\mathbb{S}^n$,*

$$T = \ln |\mathbb{S}^{n-1}| - \ln P(\hat{\Gamma}_0) \in [0, \infty]$$

  and it is maximal. i.e. no smooth solution exists for $t > T$.
- *Let $\mathcal{C}\Gamma_t :=$ the tangent cone of M_t at infinity. Then $\Gamma_t \subset \mathbb{S}^n$ is IMCF in $\mathbb{S}^n$ becoming flat as $t \to T$.*

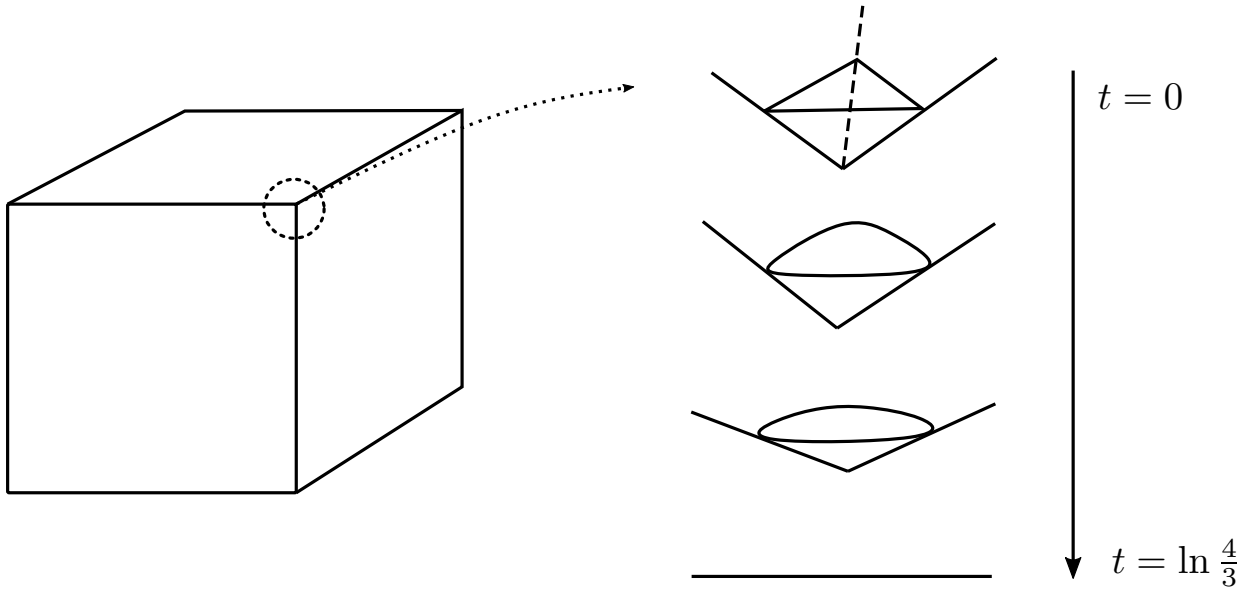
Note $\hat{\Gamma}_0$ can be any convex set in $\mathbb{S}^n$ possibly be degenerate (e.g. line, point, etc) and

$$P(\hat{\Gamma}_0) = \begin{cases} |\Gamma_0| & \text{if } \hat{\Gamma}_0 \text{ has non-empty interior in } \mathbb{S}^n \\ 2|\Gamma_0| & \text{if } \hat{\Gamma}_0 \text{ has empty interior in } \mathbb{S}^n. \end{cases}$$

Evolution of Singularity

Theorem (C.- Hung '18)

If $0 \in M_0$ is singular in the sense that the (blow-up) tangent cone $T_0M_0 \neq \mathbb{R}^n$, then $0 \in M_t$ until the tangent cone becomes flat and T_0M_t evolves by IMCF.



Theorem (C.-Daskalopoulos '18 + C.-Hung '18)

For an arbitrary convex $M_0 = \partial \hat{M}_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, a convex smooth solution exists if and only if the density of $M_0 \equiv 1$.

$$\textit{i.e. } \Theta_0(p) = \lim_{r \to 0} \frac{|B_r(p) \cap M_0|_n}{\omega_n r^n} = 1 \textit{ for all } p \in M_0.$$

Theorem (C.-Daskalopoulos '18 + C.-Hung '18)

For an arbitrary convex $M_0 = \partial \hat{M}_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, a convex smooth solution exists if and only if the density of $M_0 \equiv 1$.

$$\textit{i.e. } \Theta_0(p) = \lim_{r \to 0} \frac{|B_r(p) \cap M_0|_n}{\omega_n r^n} = 1 \textit{ for all } p \in M_0.$$

When $\Theta_0(p) = 1$? $\Theta_0(p) = \frac{|T_p M_0 \cap \mathbb{S}^n|_{n-1}}{|\mathbb{S}^{n-1}|_{n-1}}$ with $T_p M_0 :=$ the tangent cone at $p \in M_0$.

If we denote $\Gamma_0(p) = T_p M_0 \cap \mathbb{S}^n$ and $\Gamma_0(p) = \partial \hat{\Gamma}_0(p)$,

$$\theta_0(p) = 1 \text{ iff } P(\hat{\Gamma}_0(p)) = |\mathbb{S}^{n-1}|.$$

This also relates the case $T = 0$ (non-existence of solution).

Lemma (C.-Hung)

If $\hat{\Gamma}_0 \subset \mathbb{S}^n$ convex and $P(\hat{\Gamma}_0) = |\mathbb{S}^{n-1}|$, then $\hat{\Gamma}_0$ is either a hemisphere or a wedge [we call it a (hard shell) taco].

i.e. $\hat{W}_{\theta_0} = \mathbb{S}^n \cap \big(\{(r\sin\theta, r\cos\theta) \,:\, \theta \in [0,\theta_0],$ *and* $r > 0\} \times \mathbb{R}^{n-1}\big)$

for some $\theta_0 \in [0,\pi]$ up to an isometry of $\mathbb{S}^n$.

- Smooth flow exists iff all initial singularities are tacos.
- No solution exists iff asymptotic cone (cone at infinity) is a taco. ($\Rightarrow$ no 1-dimensional convex non-compact IMCF exists)

Theorem (C.-Daskalopoulos, main apriori estimate)

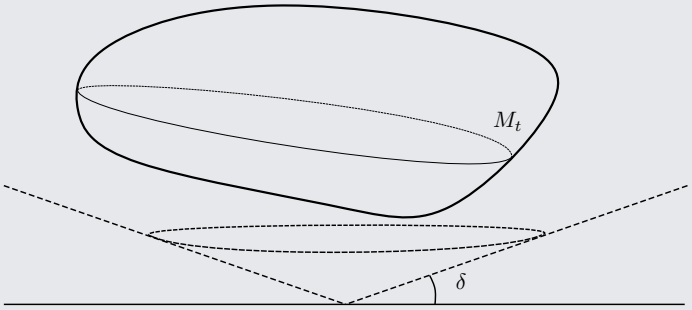
Let $F : \Sigma \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, be a convex compact IMCF and suppose there exist $\delta \in (0, \pi/2)$ and a fixed unit vector $\omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ for which

$$\langle F, \omega \rangle \geq |F| \sin \delta \qquad \text{on } \Sigma \times [0,T].$$

Then

$$\frac{1}{H|F|} \leq C \left(1 + \frac{1}{t^{1/2}} \right) \quad \text{on} \quad \Sigma \times [0,T]$$

for a constant $C = C(\delta) > 0$.



Theorem (C.-Daskalopoulos (c.f. Huisken-Ilmanen '08))

For M_t compact star-shaped IMCF with

$$0 < R_1 \leq \langle F, \nu \rangle \leq R_2 \quad \text{on } M_0$$

(the same condition of Huisken-Ilmanen), we have

$$\frac{1}{H} \leq c_n \left(\frac{R_2}{R_1}\right) \left(1 + \frac{1}{t^{1/2}}\right) R_2 \, e^{\frac{t}{n}},$$

(only $|M_0|^{1/n}$ has been replaced by R_2.)

Thank you for your attention

Useful reference (for m_{iso} and Riemannian Penrose inequality)

- Huisken's talk at IAS (available at youtube)
- J.L.Jauregui-D.A.Lee '16
- Bray's AMS notice

Convergence of Riemannian manifolds with curvature bounded below I

Jiewon Park (Caltech)

KIAS 기하학 겨울학교

January 19th, 2021

Introduction

- What does it mean that two Riemannian manifolds are "close"?
- In other words, what is a suitable topology to equip a class of Riemannian manifolds with?
- Does the closure under that topology include spaces that are no longer Riemannian manifolds, but have singularities?

These fundamental questions appear in various circumstances in geometric analysis. In the first talk, I will survey some of the convergence results for classes of manifolds with bound(s) on Ricci curvature or scalar curvature, including Gromov compactness theorem, some aspects of Cheeger-Colding theory, and Sormani-Wenger compactness theorem.

Curvatures in Riemannian geometry

Let (M, g) be a Riemannian manifold and ∇ its Levi-Civita connection. The **Riemannian curvature tensor** R is a $(1,3)$-tensor defined by

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

for vector fields X, Y, Z.
Let $p \in M$ and $u, v \in T_pM$ be linearly independent tangent vectors. The **sectional curvature** of $\{u, v\}$ is defined to be

$$K(u,v) = \frac{g(R(u,v)v,u)}{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)^2}.$$

Space forms: manifolds of constant sectional curvature.
Let e_i be an orthonormal basis of T_pM. The **Ricci curvature** Ric is a 2-tensor defined at p by

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,Y)X, e_i).$$

Ric is the trace of the curvature tensor with respect to g.

Curvatures in Riemannian geometry

The **scalar curvature** R is defined by

$$R = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}(e_i, e_i) = \sum_{i,j=1}^{n} g(R(e_i, e_j)e_j, e_i).$$

Scalar curvature is the trace of Ricci curvature with respect to g.

Gromov-Hausdorff Distance

Definition

The **Gromov-Hausdorff distance** between two metric spaces X, Y is denoted by $d_{GH}(X, Y)$ and defined to be

$$d_{GH}(X, Y) = \inf d_H^Z(\phi_X(X), \phi_Y(Y))$$

where the infimum is taken over all embeddings $\phi_X : X \to Z, \phi_Y : Y \to Z$ into a complete metric space Z, and d_H^Z is the Hausdorff distance in Z.

Gromov-Hausdorff Distance

The following definition is an extension of tangent space at a point of a Riemannian manifold to a metric space.

Definition

Let X be a metric space.

1. Let $p \in X$. A pointed metric space (Y, q) is a **tangent cone** at p of X if there exists a sequence $r_i \to 0$ such that

$$\lim_{i \to \infty} r_i^{-1} d_{GH}\left(B_p(r_i) \subset X, B_q(r_i) \subset Y\right) = 0.$$

2. A pointed metric space (Y, q) is a **tangent cone** at infinity of X if there exists a sequence $r_i \to \infty$ such that

$$\lim_{i \to \infty} r_i^{-1} d_{GH}\left(B_p(r_i) \subset X, B_q(r_i) \subset Y\right) = 0.$$

Gromov-Hausdorff Distance

Gromov Compactness Theorem

If (M_i, g_i) is a sequence of compact Riemannian manifolds such that $\mathrm{Ric}_{g_i} \geq \kappa g_i$ and $\mathrm{diam}(M_i, g_i) \leq L$ for some fixed $\kappa, L \in \mathbb{R}$, then there exists a subsequence which converges in Gromov-Hausdorff topology to a metric space.

Convergence for sectional curvature: Alexandrov spaces

Let $k \in \mathbb{R}$. Denote by M_k the 2-dimensional simply connected space form of curvature k.
Let X be a length space, i.e. a metric space such that for any $p, q \in X$, there exists a continuous path γ from p to q that realizes the distance between p and q, so that $|\gamma| = d(p, q)$.

Definition

X is **Alexandrov space** of curvature $\geq k$ if for any triangle Δpqr in X, there exists a comparison triangle $\Delta \bar{p}\bar{q}\bar{r}$ in M_k such that $d(p, q) = d_{M_k}(\bar{p}, \bar{q})$, $d(q, r) = d_{M_k}(\bar{q}, \bar{r})$, $d(r, p) = d_{M_k}(\bar{r}, \bar{p})$, so that for any $s \in qr$ and $\bar{s} \in \bar{q}\bar{r}$ with $d(q, s) = d_{M_k}(\bar{q}, \bar{s})$,

$$d(p, s) \geq d_{M_k}(\bar{p}, \bar{s}).$$

The class of Alexandrov spaces of curvature $\geq k$ is closed with respect to Gromov-Hausdorff convergence.

Convergence for sectional curvature: Alexandrov spaces

Theorem (convergence for sectional curvature)

If (M_i, g_i) is a sequence of Riemannian manifolds of dimension n with sectional curvature $\geq k$ that converges in Gromov-Hausdorff topology to a metric space X, then X is a locally compact Alexandrov space of curvature $\geq k$.

(However, not all locally compact Alexandrov spaces are limits of Riemannian manifolds.)

Alexandrov spaces of curvature $\geq k$ what arise as limit of manifolds with sectional curvature $\geq k$ share many properties with Riemannian manifolds, for example:

- One can define the tangent space at each point, i.e. the "space of angles", and that notion coincides with the Gromov-Hausdorff tangent cone at that point. The tangent cone of an Alexandrov space of Hausdorff dimension n is an Alexandrov space of nonnegative curvature of Hausdorff dimension n. Moreover, every point has a neighborhood homeomorphic to its tangent space.

Convergence for sectional curvature: Alexandrov spaces

- On Alexandrov spaces of curvature bounded below and Hausdorff dimension 2, one can prove a generalization of Gauss-Bonnet theorem.
- One can define parallel transport along a minimizing path, harmonic maps, etc.

Theorem (splitting theorem for Alexandrov spaces)

If a locally compact Alexandrov space X of nonnegative curvature contains a line, i.e. a minimizing path defined on all of $\mathbb{R}$, then X is isometric to a metric product $\mathbb{R} \times Y$ for some nonnegatively curved Alexandrov space Y.

Cheeger-Colding theory

Cheeger-Colding theory contains information on the structure of and convergence to Ricci limit spaces.

In geometry, a "rigidity theorem" says that if a geometric quantity such as volume or diameter attains the possible maximal value for the given curvature conditions, then the metric is a certain warped product.

Theorem (Cheeger-Gromoll splitting theorem)

Let (M, g) be a complete Riemannian manifold of dimension n of nonnegative Ricci curvature. If M contains a line, then M is isometric to a product $\mathbb{R} \times N$ for some Riemannian manifold N of dimension $(n-1)$ of nonnegative Ricci curvature.

Cheeger-Colding theory

An "almost rigidity theorem" says that if the quantity is close to being maximal, the metric is close (in a suitable distance) to a warped product.

Let (X, d_X) be an arbitrary metric space, and $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ a positive function. The warped product $(a, b) \times_f X$ is the topological space $(a, b) \times X$ equipped with the metric d' given by

$$d'((r_1, x_1), (r_2, x_2)) = \inf \int_0^{d_X(x_1,x_2)} \left(r'(t)^2 + f(r(t))^2\right)^{1/2} dt,$$

where the infimum is taken over continuous paths $r : [0, d_X(x_1, x_2)] \to [r_1, r_2]$ with $r(0) = r_1, r(d_X(x_1, x_2)) = r_2$.

Suppose that $x_1, x_2 \in X$ and $r_1 < r_2$, $r_3 < r_4$. Then $d'((r_2, x_1), (r_4, x_2))$ is determined only by $r_1, r_2, r_3, r_4, d_X(x_1, x_2)$, that is, for some function Q,

$$d'((r_2, x_1), (r_4, x_2)) = Q(r_1, r_2, r_3, r_4, d'((r_1, x_1), (r_3, x_2))). \tag{1}$$

Cheeger-Colding theory

Define $\mathcal{F}$ by

$$\mathcal{F}(r) = -\int_r^b f(u)\,du. \tag{2}$$

If X is an $(n-1)$-dimensional Riemannian manifold with metric g_X, then on $(a,b) \times_f X$,

$$\mathrm{Hess}_{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}'' \circ \mathcal{F}^{-1}) g_{(a,b)\times_f X}.$$

Conversely, the existence of a function whose Hessian is conformal to the metric implies that the manifold is a warped product.
Let (M, g, p) be a complete pointed Riemannian manifold, r the distance function from p, and $A_{a,b}$ the annulus $A_{a,b} = \{a \le r \le b\}$. If there is an "almost warping" function $\tilde{\mathcal{F}}$, then the distance d induced by g on M is close to d'.

Theorem (Cheeger-Colding [2])

Suppose that

$$\mathrm{Ric}_g \ge (n-1)\Lambda. \tag{3}$$

Let $R > 0$ and $\varepsilon > 0$. There exists $\delta = \delta(R, \varepsilon, \Lambda) > 0$ with the following effect.

Cheeger-Colding theory

Theorem (continued) (Cheeger-Colding [2])

Let $0 < a < b < R$. Suppose that there exists $\tilde{\mathcal{F}} : A_{a,b} \to \mathbb{R}$ such that

$$\operatorname{range} \tilde{\mathcal{F}} \subset \operatorname{range} \mathcal{F}, \tag{4}$$

$$|\nabla \tilde{\mathcal{F}} - \nabla \mathcal{F}| < \delta, \tag{5}$$

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(A_{a,b})} \int_{A_{a,b}} |\nabla \tilde{\mathcal{F}} - \nabla \mathcal{F}| < \delta, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(A_{a,b})} \int_{A_{a,b}} |\operatorname{Hess}_{\tilde{\mathcal{F}}} - (H \circ \tilde{\mathcal{F}}) g| < \delta, \tag{7}$$

where $\mathcal{F}$ is defined on $A_{a,b}$ by $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(r(x))$ and $H = \mathcal{F}'' \circ \mathcal{F}^{-1}$.

Cheeger-Colding theory

Theorem (continued) (Cheeger-Colding [2])

Let $x_1, x_2, y_1, y_2 \in B_R(p)$ be such that

$$r(y_1) - r(x_1) = d(x_1, y_1), \tag{8}$$

$$r(y_2) - r(x_2) = d(x_2, y_2). \tag{9}$$

Then,

$$|d(y_1, y_2) - Q\left(r(x_1), r(y_1), r(x_2), r(y_2), d(x_1, x_2)\right)| < \varepsilon. \tag{10}$$

Cheeger-Colding theory

How can one find an almost warping function on a given manifold of nonnegative Ricci curvature? If M has large volume growth, then harmonic functions on annuli can be used. The key is finding a good cutoff function ϕ so that $|\nabla\phi|$ and $|\Delta\phi|$ are bounded above.

Theorem (Cheeger-Colding [2])

Let $0 < a, b$ and $0 < \omega < 1$. Suppose that M has nonnegative Ricci curvature,

$$\frac{\mathrm{vol}(A_{a,b})}{\mathrm{Area}(r^{-1}(a))} \geq (1-\omega)\frac{\int_a^b f^{n-1}(r)\,dr}{f^{n-1}(a)}, \tag{11}$$

and

$$(n-1)\frac{f'(a)}{f(a)} \geq \Delta r \quad \text{on } r^{-1}(a). \tag{12}$$

Then there exists $\tilde{\mathcal{F}}$ defined on $A_{a,b}$ so that the equations (4)–(7) in Theorem 0.1 are satisfied on $A_{a+\varepsilon,b-\varepsilon}$, where ε can arbitrarily small if ω is sufficiently small.

Cheeger-Colding theory

Instead of solving the Dirichlet problem on annuli, one can also work on the whole manifold by considering the Green function defined on all of $M\backslash\{p\}$.

Definition

A smooth symmetric function $G : M \times M\backslash D \to \mathbb{R}$, where D is the diagonal, is said to be a Green function *(for the Laplacian) if it is the fundamental solution of the Laplace equation, that is,*

$$\Delta_y G(x, y) = -n(n-2)\omega_n \delta_x(y),$$

where ω_n is the volume of the unit ball in the n-dimensional Euclidean space.

The normalization is chosen so that $G = r^{2-n}$ on $\mathbb{R}^n$ if $n > 3$. If M is complete then a Green function always exists (Malgrange-Ehrenpreis theorem).

Definition

A complete Riemannian manifold M is said to be nonparabolic if it possesses a positive Green function G for the Laplacian. M is said to be parabolic otherwise.

Cheeger-Colding theory

Nonparabolicity can be characterized in terms of the volume growth.

Theorem (Varopoulos [25])

If M is complete and has nonnegative Ricci curvature, and of dimension greater than 2, then M is nonparabolic if and only if

$$\int_1^\infty \frac{t}{\mathrm{vol}(B_p(t))}\, dt < \infty$$

for some $p \in M$.

It is possible to choose the minimal positive Green function (Li-Tam [17]).

Definition

M is said to have maximal volume growth if $\lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(B_p(r))}{\omega_n r^n} > 0.$

If $n \geq 3$, then maximal volume growth implies nonparabolicity.

Cheeger-Colding theory

We focus on the convergence at infinity of M to a cone, so we will take the warping function f to be $f(x) = |x|$. Note that if (M, g) is the Euclidean space $\mathbb{R}^n$, then $G = r^{2-n}$. It is very useful to define the function b by

$$b = G^{\frac{1}{2-n}}, \tag{13}$$

so that $b = r$ on $\mathbb{R}^n$.

When the sectional curvature K is nonnegative outside of a compact set D, Li [16] proved that if M is moreover Kähler, then $M \backslash D$ is isometric to a product of a compact Kähler manifold of nonnegative sectional curvature and a connegatively curved Riemann surface with boundary, based on the estimates in Li-Tam [17].

Theorem (Colding-Minicozzi [7])

Let $R > 0$ and $\Omega > 1$. Suppose that M has nonnegative Ricci curvature and maximal volume growth, so that

$$V_M := \lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(B_p(r))}{\omega_n r^n} > 0. \tag{14}$$

Then there exists $R_0 > 0$ and $\delta > 0$, depending only on Ω, V_M so that whenever $R > R_0$,

$$\sup_{r\in(R,\Omega R)} \left| \frac{b}{r} - V_M^{\frac{1}{n-2}} \right| < \delta, \tag{15}$$

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(A_{R,\Omega R})} \int_{A_{R,\Omega R}} \left| |\nabla b| - V_M^{\frac{1}{n-2}} \right| < \delta, \tag{16}$$

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(A_{R,\Omega R})} \int_{A_{R,\Omega R}} \left| \mathrm{Hess}_{b^2} - \frac{\Delta b^2}{n} g \right| < \delta. \tag{17}$$

δ can be arbitrarily small if V_M is sufficiently close to 1.

Cheeger-Colding theory

One can estimate the Gromov-Hausdorff distance between an annulus and a discrete approximation of it by picking out points along the geodesic rays:

Theorem (Cheeger-Colding [2])

Let $\Omega > 1$ and $\varepsilon > 0$. Suppose that (M, g, p) is complete and has nonnegative Ricci curvature and maximal volume growth, and of dimension $n \geq 3$. Then there exists $R_0 = R_0(\varepsilon, \Omega) > 0$ and a compact metric space X so that, whenever $R > R_0$,

$$d_{GH}\left((A_{R,\Omega R}, p), (A^{C(X)}_{R,\Omega R}, o)\right) < \varepsilon, \tag{18}$$

where $C(X) = [0, \infty) \times_r X$ is the cone over X.

The diameter of X can be bounded from above by a factor determined by the volume growth and the decay rate of the integrals of the gradient of b and trace-free Hessian of b^2.

Cheeger-Colding theory

An important corollary of the above theorem is the following "volume cone is metric cone" theorem.

Theorem (Cheeger-Colding [2], [3])

1. *Let $r > 0$. Suppose that (M_i, g_i, p_i) is a sequence of complete Riemannian manifolds with $\mathrm{Ric}_{g_i} \geq -(n-1)\Lambda$, $\mathrm{diam}(M_i, g_i) \leq L$, and $\mathrm{vol}(B^{M_i}_{p_i}(r)) \geq V$. Suppose that this sequence converges in Gromov-Hausdorff topology to a metric space (X, d, p). Then the tangent cone at p is a metric cone: it is isometric to a warped product $C(X) = [0, \infty) \times_r X$, where the cross section X is a compact metric space.*
2. *Suppose that (M, g) is a complete Riemannian manifold with Ricci curvature bounded below and maximal volume growth. Then the tangent cone at infinity of (M, g) is a metric cone.*

Cheeger-Colding theory

In light of this theorem, one may consider the distance to the nearest cone.

Definition (Colding [6])

Let (M, g) be a complete manifold. We define Θ_r to be the scale-free distance to the nearest cone, that is,

$$\Theta_r = \inf \frac{d_{GH}\left((B_p^M(r), p), (B_o^{C(X)}(r), o)\right)}{r} \tag{19}$$

where the infimum is taken over all complete metric space X. (Θ_r is allowed to be ∞ depending on (M, g) and r.)

The preceding results give that Θ_r can be bounded by the weighted L^2-integral of the trace-free Hessian on scale r. In fact, the proofs of the theorems above give a precise relationship between Θ_r and the integral:

Cheeger-Colding theory

Theorem (Colding [6], Theorem 4.7, Corollary 4.8)

Let $\varepsilon > 0$. Let (M, g, p) be a pointed complete manifold of dimension $n \geq 3$ with nonnegative Ricci curvature and maximal volume growth, so that

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(B_p(r))}{\omega_n r^n} = V_M > 0.$$

Then there exists $C = C(\varepsilon, n, V_M)$ so that

$$\Theta_r^{2+\varepsilon} \leq C r^{-n} \int_{b\leq Cr} \left| \mathrm{Hess}_{b^2} - \frac{\Delta b^2}{n} g \right| d\mathrm{vol}, \tag{20}$$

and

$$\Theta_r^{2+\varepsilon} \leq C r^{-n} \int_{b\leq Cr} \left| \mathrm{Hess}_{b^2} - \frac{\Delta b^2}{n} g \right|^2 d\mathrm{vol}. \tag{21}$$

Ricci limit spaces

Let X be a noncollapsed Ricci limit space, i.e. $(M_i^n, g_i, p_i) \to (X, d, p)$ in Gromov-Hausdorff topology where $\mathrm{Ric}_{M_i^n} \geq n-1$ and $\mathrm{vol}(B_1(p_i)) > v > 0$.

[3] The volume measure of (M_i^n, g_i) converges to a unique measure on X which is absolutely continuous with respect to the Hausdorff measure.

A point in X is called **regular** if any tangent cone at p is isometric to $\mathbb{R}^n$; otherwise it is called **singular**. Let $\mathcal{R}$ be the regular set and $\mathcal{S}$ the singular set. Even for points in $\mathcal{S}$, every tangent cone is a metric cone. Define the k-**th stratum** $\mathcal{S}^k$ to be the set of points where tangent cones split in at most k directions, that is,

$$\mathcal{S}^k(X) = \{x \in X : \text{ no tangent cone at } x \text{ is isometric to } \mathbb{R}^{k+1} \times C(Z)\}.$$

Then X is a stratified space: $\mathcal{S}^0 \subset \mathcal{S}^1 \subset \cdots \subset \mathcal{S}^{n-2} = \mathcal{S} \subset \mathcal{S}^{n-1} = X$, so that $\mathcal{S}^{n-1} \backslash \mathcal{S}^{n-2} = \mathcal{R}$. Moreover, $\dim \mathcal{S}^k \leq k$, where dimension is the Hausdorff dimension.

Ricci limit spaces

Theorem (codimension 4 conjecture [4])

If moreover $|\mathrm{Ric}_{M_i^n}| \leq n-1$, then $\dim(\mathcal{S}) \leq n-4$. Here the dimension can be taken to be Hausdorff or Minkowski dimension. Equivalently, $\mathcal{S}^{n-4} = \mathcal{S}^{n-3} = \mathcal{S}^{n-2} = \mathcal{S}$.

On a n-dimensional manifold of Ricci curvature bounded below, $\mathrm{Ric} \geq (n-1)k$, Bishop-Gromov volume monotonicity says that the volume ratio $\frac{\mathrm{vol}(B_p(r))}{B^{M_k}(r)}$ is monotone nonincreasing in r.

The limit space has nonnegative Ricci curvature in the sense that the volume monotonicity holds on the limit space when one replaces volume with the limit measure of Cheeger-Colding.

References I


Cao, H. D., Ni, L. "Matrix Li-Yau-Hamilton estimates for heat equation on Kähler manifolds". In: *Math. Ann.* 331 (2005), pp. 795–807.


Cheeger, J., Colding, T.H. "Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products". In: *Ann. of Math.* 144.1 (1996), pp. 189–237.


Cheeger, J., Colding, T.H. "On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, I". In: *J. Diff. Geom.* 46.3 (1997), pp. 406–480.


Cheeger, J., Naber, A. "Regularity of Einstein manifolds and the codimension 4 conjecture". In: *Ann. Math.* 182 (2015), pp. 1093–1165.


Cheeger, J., Tian, G. "On the cone structure at infinity of Ricci flat manifolds with Euclidean volume growth and quadratic curvature decay". In: *Invent. Math.* 118 (1994), pp. 493–571.


Colding, T. H. "New monotonicity formulas for Ricci curvature and applications. I". In: *Acta Math.* 209 (2012), pp. 229–263.

References II


Colding, T. H., Minicozzi, W. P. II. "Large scale behavior of kernels of Schrödinger operators". In: *Amer. J. of Math.* 119.6 (1997), pp. 1355–1398.


Colding, T. H., Minicozzi, W. P. II. "On uniqueness of tangent cones of Einstein manifolds". In: *Invent. Math.* 196 (2014), pp. 515–588.


Colding, T. H., Naber, A. "Characterization of tangent cones of noncollapsed limits with lower Ricci bounds and applications". In: *Geom. Funct. Anal.* 23.1 (2013), pp. 134–148.


Donaldson, S., Sun, S. "Gromov-Hausdorff limits of Kähler manifolds and algebraic geometry, II". In: *J. Diff. Geom.* 107.2 (2017), pp. 327–371.


Gromov, M. "Dirac and Plateau billiards in domains with corners". In: *Central European Journal of Mathematics* 12 (2014), pp. 1109–1156.


Hamilton, R. S. "A matrix Harnack estimate for the heat equation". In: *Comm. Anal. Geom.* 1.1 (1993), pp. 113–126.

References III


Hamilton, R. S. "Harnack estimate for the mean curvature flow". In: *J. Differential Geom.* 41 (1995), pp. 215–226.


Hamilton, R. S. "The Harnack estimate for the Ricci flow". In: *J. Differential Geom.* 37 (1993), pp. 225–243.


Hattori, K. "The nonuniqueness of the tangent cones at infinity of Ricci-flat manifolds". In: *Geom. Topol.* 21.5 (2017), pp. 2683–2723.


Li, P. "On the structure of complete Kähler manifolds with nonnegative curvature near infinity". In: *Invent. Math.* 99 (1990), pp. 579–600.


Li, P., Tam, L. "Symmetric Green's functions on complete manifolds". In: *Amer. J. Math.* 109.6 (1987), pp. 1129–1154.


Li, P., Yau, S.-T. "On the parabolic kernel of the Schrödinger operator". In: *Acta Math.* 156 (1986), pp. 153–201.


Ni, L. "A matrix Li-Yau-Hamilton estimate for the Kähler-Ricci flow". In: *J. Diff. Geom.* 75 (2007), pp. 303–358.

References IV


Park, J. "Canonical identification at infinity for Ricci-flat manifolds". In: *Submitted. arXiv:1910.12287* (2019).


Park, J. " Matrix inequality for the Laplace equation". In: *Int. Math. Res. Not.* 2019.11 (2019), pp. 3485–3497.


Perelman, G. "Example of a complete Riemannian manifold of positive Ricci curvature with Euclidean volume growth and with nonunique asymptotic cone". In: *Comparison Geometry, MSRI Publications* 30 (1997), pp. 165–166.


Schoen, R. "Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature". In: *J. Diff. Geom.* 20 (1984), pp. 479–495.


Sormani, C., Wenger, S. "Intrinsic flat convergence of manifolds and other integral current spaces". In: *J. Diff. Geom.* 87 (2011).


Varopoulos, N. T. "The Poisson kernel on positively curved manifolds". In: *J. Funct. Anal.* 44 (1981), pp. 359–389.

References V



Wenger, S. " Compactness for manifolds and integral currents with bounded diameter and volume". In: *Calc. Var. PDE.* 40 (2011), pp. 423–448.

Thank you!

Convergence of Riemannian manifolds with curvature bounded below II

Jiewon Park (Caltech)

KIAS 기하학 겨울학교

January 20th, 2021

1. Convergence for scalar curvature bounded below

What can we say about convergence of manifolds with a lower bound on scalar curvature only? In this case, we do not have Gromov's compactness theorem anymore.

Sormani and Wenger [25] defined the **intrinsic flat distance** between two compact manifolds, using the measure-theoretic notions of integral currents and weak convergence of metric spaces by Ambrosio-Kirchheim.

Let (X, d, T) be an integer rectifiable current space, meaning that (X, d) is a countably $\mathcal{H}^m$ rectifiable space and T is a linear functional on the space of compactly supported "differential forms" of degree m on X, so that on each Lipschitz chart, T has integer multiplicities. One can define the mass $M(T)$ of the current T.

An oriented Riemannian manifold (M^m, g) of finite volume is naturally an integral current space, with T given by $T(\omega) = \int_M \omega$ for an m-form ω. The mass of T is then given by $M(T) = \mathrm{vol}(M)$.

One can define the boundary of T in a manner so that Stokes' theorem holds.

Intrinsic flat distance

Let Z be a metric space and T_1 and T_2 be two m-integral currents on Z. the **flat distance** between T_1 and T_2 is defined to be

$$d_{\mathcal{F}}^{Z}(T_1, T_2) = \inf\{M(B^{m+1}) + M(A^m) : T_1 - T_2 = A + \partial B\}.$$

The **intrinsic flat distance** between two integral current spaces (X_1, d_1, T_1) and (X_2, d_2, T_2) is defined to be

$$d_{\mathcal{F}}((X_1, d_1, T_1), (X_2, d_2, T_2)) = \inf\left\{ d_{\mathcal{F}}^{Z}(\phi_{1\#}T_1, \phi_{2\#}T_2) \mid \phi_i : X_i \to Z \right\}$$

where the infimum is taken over all common complete metric spaces Z and all isometric embeddings $\phi_i : X_i \to Z$, where $\phi_{i\sharp}$ is the push-forward map on integral currents.

Theorem (compactness for scalar curvature [26])

If (M_j, g_j) is a sequence of closed oriented Riemannian manifolds such that $\mathrm{diam}(\mathrm{M_j}) \leq D$ and $\mathrm{vol}(M_j) \leq V$, then a subsequence converges in intrinsic flat topology to a limit. The limit is an integral current space.

Question: If (M_j, g_j) has nonnegative (positive) scalar curvature, does the limit space have "nonnegative (positive) scalar curvature" in some generalized sense?

Theorem (Gromov [10])

Let M^n be a smooth manifold and g_j a sequence of Riemannian metrics with $R_{g_j} \geq c$. If g_j converges in $\mathcal{C}^0$ to a smooth Riemannian metric g_∞, then $R_{g_\infty} \geq c$.

There are many approaches to define weak notions of scalar curvature on singular metric spaces: using dihedral angles on a polyhedra [10], using Ricci flow on $\mathcal{C}^0$ metrics [2], $\cdots$

For the "small infinitesimal volume" sense of nonnegative scalar curvature, there is a counterexample [1] using the "sewing" technique; A sequence of metrics g_j on $\mathbb{S}^3$ can degenerate into $\mathbb{S}^3$ with a curve identified to a single point. At this singular point, it is unlikely that at this point, the limit space has positive scalar curvature. In this example, there are minimal surfaces Σ_j in $(\mathbb{S}^3, g_j)$ such that $\mathrm{Area}(\Sigma_j) \to 0$ as $j \to \infty$.

Conjecture (Gromov-Sormani [11])

Let $\{M_j^3\}$ be a sequence of closed oriented 3-manifolds without boundary satisfying

$$\mathrm{vol}(M_j) \leq V, \mathrm{diam}(M_j) \leq D, R(M_j) \geq 0, \mathrm{minA}(M_j) \geq A > 0.$$

Here, $\mathrm{minA}(M_j)$ is defined as the infimum of areas of closed embedded minimal surfaces on M_j. Then a subsequence of $\{M_j\}$ converges in the intrinsic flat topology to a limit space M_∞. Moreover, M_∞ has nonnegative generalized scalar curvature and has Euclidean tangent cones almost everywhere.

Theorem (P.-Tian-Wang [22])

Let $\{M_j^3\}$ be a sequence of closed oriented rotationallly symmetric 3-manifolds without boundary satisfying

$$\mathrm{diam}(M_j) \leq D, R(M_j) \geq 0, \mathrm{minA}(M_j) \geq A > 0.$$

Then a subsequence of $\{M_j\}$ converges in the intrinsic flat topology to a limit space (M_∞, g_∞). Moreover, g_∞ is a rotationally symmetric $\mathcal{C}^0$ metric such that the warping function satisfies the nonnegative scalar curvature in distribution sense. (M_∞, g_∞) has Euclidean tangent cones almost everywhere.

Positive mass theorem: any n-dimensional complete asymptotically flat manifold of nonnegative scalar curvature has nonnegative ADM mass. If ADM mass is 0, then the manifold is $\mathbb{R}^n$.

Question: If the ADM mass is small, is the manifold "close" to $\mathbb{R}^n$?

Theorem (Stability of positive mass theorem [17])

For any $\varepsilon, D, A_0 > 0$ there exists $\delta = \delta(\varepsilon, D, A) > 0$ so that, if M is an n-dimensional complete rotationally symmetric manifold of nonnegative scalar curvature with no closed interior minimal hypersurfaces, such that either M has no boundary or ∂M is a stable minimal hypersurface, with

$$m_{\mathrm{ADM}}(M) < \delta,$$

then

$$d_{\mathcal{F}}\left(T_D(\Sigma_0) \subset M, T_D(\Sigma_0) \subset \mathbb{R}^n\right) < \varepsilon.$$

Here Σ_0 is the $(n-1)$-dimensional sphere or area A_0, and T_D denoted the D-tubular neighborhood.

Penrose inequality: If (M, g) si an n-dimensional complete asymptotically flat manifold of nonnegative scalar curvature whose boundary is an outermost minimal hypersurface, then $m_{\mathrm{ADM}} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Area}(\partial M)}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}$, where ω_{n-1} is the area of the unit $(n-1)$-sphere. If equality holds, then (M, g) is isometric to a Schwarzschild manifold.

Question: If the ADM mass is small, is the manifold "close" to a Schwarzschild space?

[16] Yes, at least in the rotationally symmetric case: the manifold is "close" to a Schwarzschild space in a certain Lipschitz sense.

2. Uniqueness/non-uniqueness of tangent cone

Let (M, g) be a complete non-compact manifold with nonnegative Ricci curvature and maximal volume growth. Then the tangent cones of (M, g) are metric cones by Cheeger-Colding theory.

In general, tangent cones may depend on the choice of rescalings $\{r_i\}$; one might see different cones at different scales.

- Perelman [23], Cheeger-Colding [4]: examples that have non-isometric tangent cones, constructed by finding multiply warped products with "oscillating" warping functions.
- Colding-Naber [8]: examples where the tangent cones are not only non-isomorphic, but non-homeomorphic.
- What if not only nonnegative Ricci curvature, but Ricci-flat? Hattori [15]: example of a 4-dimensional hyperKähler manifold (with less than maximal volume growth) that has infinitely many non-isometric tangent cones at infinity.

There are works proving uniqueness of tangent cone under additional assumptions on the curvature, geometry of a tangent cone, algebraicity, etc.

- Cheeger-Tian [5] showed that the tangent cone is unique if (M, g) is Ricci-flat and has maximal volume growth, and a tangent cone is smooth and integrable (which is an assumption on the deformation of the Einstein equation on the cross section).
- If one considers Kähler manifolds, Donaldson-Sun [9] proved uniqueness of tangent cone at singularities of a limit of Kähler-Einstein manifolds, by heavily using the algebraic structure of the limit space.

Most relevant to this talk:

Theorem (Colding-Minicozzi [7], Theorem 0.2)

Let M^n be a complete non-compact Ricci-flat manifold of maximal volume growth. If one tangent cone at infinity has smooth cross section, then the tangent cone is unique.

3. Identification of scales

Theorem (Colding-Minicozzi [7])

Suppose that one tangent cone of (M^n, g) is smooth, i.e. it is in the form of $(\mathbb{R}_{\geq 0} \times N, dr^2 + r^2 g_N)$ for some smooth compact Riemannian manifold (N^{n-1}, g_N). Let $\mathcal{A}$ be the set of $\mathcal{C}^{2,\beta}$ metrics g and positive $C^{2,\beta}$ functions w on N, and define a subspace $\mathcal{A}_1$ of $\mathcal{A}$ by

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ (g, w) \in \mathcal{A} \,\middle|\, \int_N w \, d\mu_g = \mathrm{Vol}(\partial B_1(0)) \right\}.$$

Define the functional $\mathcal{R} : \mathcal{A}_1 \to \mathbb{R}$ by

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2-n} \left(A - \frac{r^{3-n}}{n-2} \int_{b=r} R_{b=r} |\nabla b| \right).$$

Then $\mathcal{R}$ satisfies the Łojasiewicz-Simon inequality for some $\alpha < 1$

$$|\mathcal{R}(g, w) - \mathcal{R}(g_N, V_M)|^{2-\alpha} \leq |\nabla \mathcal{R}|^2 (g, w).$$

The Łojasiewicz inequality implies the critical decay

$$\int_{b\geq r} b^{-n}\left|\mathrm{Hess}^g_{b^2}-\frac{\Delta b^2}{n}g\right|_g^2\leq\frac{C}{\log r^{1+\beta}}. \tag{1}$$

Denote by $\Phi : M\times\mathbb{R}\to M$ the gradient flow of b^2 so that

$$\frac{d\Phi_t(x)}{dt}=\nabla b^2(x).$$

In the special case of the Euclidean space $(M,g,p)=(\mathbb{R}^n,g_{\mathrm{Euc}},0)$, Φ is simply a dilation map $\Phi_t(x)=e^{2t}x$. If we perform a coordinate change to the metric $g_{\mathrm{Euc}}=dr^2+r^2g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ by $s=\log r$, so that $r^{-2}g_{\mathrm{Euc}}=ds^2+g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ is now a cylindrical metric, then since $r(\Phi_t(x))=e^{2t}x$, it follows that

$$(r\circ\Phi_t)^{-2}\Phi_t^*g_{\mathrm{Euc}}=g_{\mathrm{Euc}},$$

so the metric $(r\circ\Phi_t)^{-2}\Phi_t^*g_{\mathrm{Euc}}$ is constant in t.

Question: a natural identification between scales?

For large $r_0>0$ fixed and $A>0$, would (some version of) $\|(r\circ\Phi_t)^{-2}\Phi_t^*g-(r\circ\Phi_{At})^{-2}\Phi_{At}^*g\|_{\mathcal{C}^\infty(g|_{\partial B_p(r_0)})}\leq\psi(t)$, and $\lim_{t\to\infty}\psi(t)=0$, hold? If so, Φ provides a good way of identifying scales.

Theorem (P. [20])

Let (M^n, g) be a complete Ricci-flat manifold of dimension $n \geq 3$ and maximal volume growth. Define the family of metrics $g(t)$ by

$$g(t) = (b \circ \Phi_t)^{-2} \Phi_t^* g. \tag{2}$$

Suppose that a tangent cone at infinity of M has smooth cross section. Let $A > 0$. Then there exist constants $r_0, \beta > 0$ so that for any $r > r_0$ and $T > t > 0$,

$$\fint_{b=r} \left\{ \sup_{v \neq 0} \left| \log \frac{g(At)(v,v)}{g(t)(v,v)} \right| \right\} d\sigma \leq C t^{-\frac{\beta}{2}}, \tag{3}$$

where r_0, β depend on (M, g) only, and C depends on (M, g) and A.

Remark

The idea of conformally changing a given metric by a suitable factor of a positive Green function of a linear elliptic operator has appeared in other works. For instance Schoen used the Green function of the operator $Lu = \Delta u - u$ in his solution to the Yamabe problem [24].

Remark

With the aid of some functional inequalities, there is no need to consider the conformally changed metric $g(t)$. For instance, suppose that the following Hardy-Sobolev type inequality holds on M,

$$\int_{b\leq r} b^{-n}|f-\bar{f}_r|^2 \leq C\int_{b\leq r} b^{2-n}|\nabla f|^2 \qquad \text{for any } f\in\mathcal{C}^\infty(M), \lim_{r\to\infty} f = 0. \tag{4}$$

Then one can directly work with the rescaled metrics $\tilde{g}(t) = e^{-4V_M^{\frac{2}{n-2}}t}\Phi_t^* g$ and obtain the same convergence of $\tilde{g}(t)$. The proof carries through using of the Hardy-Sobolev inequality applied to $f = |\nabla b|^2 - V_M^{\frac{2}{n-2}}$. One can conclude that the above theorem holds with $g(t)$ replaced with $\tilde{g}(t)$.

3. Matrix Harnack inequality

The Li-Yau gradient estimate for heat equation:

Theorem (Li-Yau [18])

Let (M, g) be a compact Riemannian manifold and $f > 0$ a positive solution to the heat equation, $\partial_t f = \Delta f$. Suppose that M has nonnegative Ricci curvature. Then for any $t > 0$ and any vector field V on M, we have

$$\partial_t f + \frac{n}{2t} f + 2Df(V) + f|V|^2 \geq 0. \tag{5}$$

Later this was generalized to a matrix estimate by Hamilton:

Theorem (Hamilton [12])

Suppose moreover that M has parallel Ricci curvature and nonnegative sectional curvature. Then for any $t > 0$ and for any vector field V_i on M, we have

$$D_i D_j f + \frac{1}{2t} f g_{ij} + D_i f \cdot V_j + D_j f \cdot V_i + f V_i V_j \geq 0. \tag{6}$$

Taking the trace of this matrix inequality yields the Li-Yau gradient estimate, although the curvature assumptions are stronger for the matrix inequality. Matrix estimates have also been developed for other situations, such as the heat equation on Kähler manifolds with nonnegative holomorphic bisectional curvature by Ni-Cao [3], Ricci flow by Hamilton [14], Kähler-Ricci flow by Ni [19], and mean curvature flow by Hamilton [13].

Theorem (Colding [6])

If (M^n, g) is nonparabolic and has nonnegative Ricci curvature, then

$$|\nabla b| \leq 1.$$

If equality holds at any point on $M \backslash \{p\}$, then $(M, g) \cong (\mathbb{R}^n, g_{\text{Euc}})$.
In addition,

$$\lim_{r \to \infty} \sup_{M \backslash B_r(p)} |\nabla b| = V_M^{1/(n-2)}.$$

On $\mathbb{R}^n$, $b^2 = r^2$ and $\mathrm{Hess}_{b^2} = 2g$. Hence it is natural to ask whether $\mathrm{Hess}_{b^2} \leq 2g$ in general, or at least:

if $\mathrm{Hess}_{b^2} \leq Cg$ near p for some C, then does this bound on Hess_{b^2} extend to M?

Theorem (P. [21])

Suppose that (M^n, g) is nonparabolic and satisfies the following two curvature conditions:

- $R(\nabla b, V, \nabla b, V) \geq 0$ for any vector field V on M,
- $|\nabla \mathrm{Ric}| \leq \epsilon$ for some $\epsilon > 0$.

Suppose that

- $\mathrm{Hess}_{b^2} \leq Dg$ on $M \backslash \{p\}$ for some D, and
- $\mathrm{Hess}_{b^2} \leq Cg$ near p for some $C \leq C(n, \epsilon)$.

Then $\mathrm{Hess}_{b^2} \leq Cg$ on $M \backslash \{p\}$.

References I



Basilio, J., Dodziuk, J., Sormani, C. "Sewing Riemannian Manifolds with Positive Scalar Curvature". In: *J. Geom. Anal.* *https://doi.org/10.1007/s12220-017- 9969-y* ().



Burkhardt–Guim, P. "Pointwise lower scalar curvature bounds for C^0 metrics via regularizing Ricci flow". In: *Geom. Funct. Anal* 29 (2019), pp. 1703–1772.



Cao, H. D., Ni, L. "Matrix Li-Yau-Hamilton estimates for heat equation on Kähler manifolds". In: *Math. Ann.* 331 (2005), pp. 795–807.



Cheeger, J., Colding, T.H. "On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, I". In: *J. Diff. Geom.* 46.3 (1997), pp. 406–480.



Cheeger, J., Tian, G. "On the cone structure at infinity of Ricci flat manifolds with Euclidean volume growth and quadratic curvature decay". In: *Invent. Math.* 118 (1994), pp. 493–571.

References II


Colding, T. H. "New monotonicity formulas for Ricci curvature and applications. I". In: *Acta Math.* 209 (2012), pp. 229–263.


Colding, T. H., Minicozzi, W. P. II. "On uniqueness of tangent cones of Einstein manifolds". In: *Invent. Math.* 196 (2014), pp. 515–588.


Colding, T. H., Naber, A. "Characterization of tangent cones of noncollapsed limits with lower Ricci bounds and applications". In: *Geom. Funct. Anal.* 23.1 (2013), pp. 134–148.


Donaldson, S., Sun, S. "Gromov-Hausdorff limits of Kähler manifolds and algebraic geometry, II". In: *J. Diff. Geom.* 107.2 (2017), pp. 327–371.


Gromov, M. "Dirac and Plateau billiards in domains with corners". In: *Central European Journal of Mathematics* 12 (2014), pp. 1109–1156.


Gromov, M., Sormani, C. "Emerging Topics: Scalar Curvature and Convergence". In: *Institute for Advanced Study Emerging Topics Report* (2018).

References III


Hamilton, R. S. "A matrix Harnack estimate for the heat equation". In: *Comm. Anal. Geom.* 1.1 (1993), pp. 113–126.


Hamilton, R. S. "Harnack estimate for the mean curvature flow". In: *J. Differential Geom.* 41 (1995), pp. 215–226.


Hamilton, R. S. "The Harnack estimate for the Ricci flow". In: *J. Differential Geom.* 37 (1993), pp. 225–243.


Hattori, K. "The nonuniqueness of the tangent cones at infinity of Ricci-flat manifolds". In: *Geom. Topol.* 21.5 (2017), pp. 2683–2723.


Lee, D., Sormani, C. " Near-equality in the Penrose Inequality for Rotationally Symmetric Riemannian Manifolds". In: *Annales Henri Poincare* 13.7 (2012), pp. 1537–1556.


Lee, D., Sormani, C. " Stability of the Positive Mass Theorem for Rotationally Symmetric Riemannian Manifolds". In: *J. Reine. Angew. Math.* 686 (2014), pp. 187–220.

References IV



Li, P., Yau, S.-T. "On the parabolic kernel of the Schrödinger operator". In: *Acta Math.* 156 (1986), pp. 153–201.



Ni, L. "A matrix Li-Yau-Hamilton estimate for the Kähler-Ricci flow". In: *J. Diff. Geom.* 75 (2007), pp. 303–358.



Park, J. "Canonical identification at infinity for Ricci-flat manifolds". In: *Submitted. arXiv:1910.12287* (2019).



Park, J. " Matrix inequality for the Laplace equation". In: *Int. Math. Res. Not.* 2019.11 (2019), pp. 3485–3497.



Park, J., Tian, W., Wang, C. "A Compactness theorem for rotationally symmetric Riemannian manifolds with positive scalar curvature". In: *Pure and Applied Math Quarterly* 14.3–4 (2019), pp. 529–561.

References V



Perelman, G. "Example of a complete Riemannian manifold of positive Ricci curvature with Euclidean volume growth and with nonunique asymptotic cone". In: *Comparison Geometry, MSRI Publications* 30 (1997), pp. 165–166.



Schoen, R. "Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature". In: *J. Diff. Geom.* 20 (1984), pp. 479–495.



Sormani, C., Wenger, S. "Intrinsic flat convergence of manifolds and other integral current spaces". In: *J. Diff. Geom.* 87 (2011).



Wenger, S. " Compactness for manifolds and integral currents with bounded diameter and volume". In: *Calc. Var. PDE.* 40 (2011), pp. 423–448.

Thank you!

Kähler–Einstein metrics, Kähler–Ricci flows and their deformations

§1. Basics

Recall

TM, J $\downarrow$ M	$T_X = T\acute{X}$ $\downarrow$ $X \quad (X_{\mathbb{R}} = M)$
g: Riemannian (hermitian if J-inv. Kähler if $\nabla J \equiv 0$	$\omega := g(J\cdot, \cdot)$ $\quad$ (Kähler $\Leftrightarrow d\omega = 0$)
$\mathrm{Ric}(g)$: Ricci curv. tensor	$\mathrm{Ric}(\omega) := \mathrm{Ric}(g)(J\cdot, \cdot)$
$\mathrm{Scal}(g) := \mathrm{tr}_g \mathrm{Ric}(g)$: Scalar curv.	$\mathrm{Scal}(\omega) := \mathrm{tr}_\omega \mathrm{Ric}(\omega) = n \dfrac{\omega^{n-1} \wedge \mathrm{Ric}(\omega)}{\omega^n}$

Note: $TM \simeq T_X$, $u \longmapsto v$ $\Rightarrow$ $g(u,u) = \omega(v, \bar{v})$, $\mathrm{Ric}(g)(u,u) = \mathrm{Ric}(\omega)(v, \bar{v})$, $\mathrm{Scal}(g) = \mathrm{Scal}(\omega)$

Def.

- g : Einstein if $\mathrm{ric}_g(u,u) := \dfrac{\mathrm{Ric}(g)(u,u)}{g(u,u)} \equiv \lambda \in \mathbb{R}$
- $g(t)$: (normalized) Ricci flow if $\dfrac{d}{dt} g(t) = -\mathrm{Ric}(g(t)) \pm \lambda \cdot g(t)$
- ω : Kähler–Einstein if $d\omega = 0$ & $\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda \cdot \omega$ (KE)
- $\omega(t)$: Kähler–Ricci flow if $d\omega(t) = 0$ & $\dfrac{d}{dt}\omega(t) = -\mathrm{Ric}(\omega(t)) \pm \lambda \cdot \omega(t)$ (KRF)
- ω is constant scalar curv. Kähler if $d\omega = 0$ & $\mathrm{Scal}(\omega) \equiv \lambda$ (cscK)
- $c_1(X) := c_1(T_X) = -c_1(K_X) = \dfrac{1}{2\pi}[\mathrm{Ric}\,\omega] \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$: first Chern class ($[\mathrm{Ric}\,\omega]$: indep. of ω)

$K_X := \Lambda^n T_X^*$: canonical line bundle

§2. Kähler-Einstein metric & Kähler-Ricci flow

Suppose X : compact Kähler

$\exists\, \omega_{KE}$ on $X \Rightarrow C_1(X) = \frac{1}{2\pi}[\mathrm{Ric}(\omega_{KE})] = \frac{\lambda}{2\pi}[\omega_{KE}]$ $\begin{cases} <0 & \text{general type} \\ =0 & \text{Calabi-Yau} \\ >0 & \text{Fano} \end{cases}$

Thm · (Aubin/Yau) $C_1(X) < 0 \Rightarrow \exists!\, \omega_{KE}$ s.t. $\mathrm{Ric}(\omega_{KE}) = -\omega_{KE}$

· (Yau) $C_1(X) = 0 \Rightarrow \exists!\, \omega_{KE} \in [\omega]$ s.t. $\mathrm{Ric}(\omega_{KE}) = 0$

Fix $\omega_0 \in -2\pi \cdot C_1(X) \overset{\partial\bar\partial}{\Rightarrow} \mathrm{Ric}(\omega_0) = -\omega_0 + i\partial\bar\partial f$, $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$

(f: Ricci potential)

ω : KE $\Leftrightarrow \mathrm{Ric}(\omega) = -\omega \Rightarrow [\omega] = [\omega_0] \overset{\partial\bar\partial}{\Rightarrow} \omega = \omega_0 + i\partial\bar\partial\varphi$, $\varphi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$

$$\mathrm{Ric}(\omega) = -\omega \underset{X:\text{cpt}}{\Leftrightarrow} (\omega_0 + i\partial\bar\partial\varphi)^n = e^{\varphi + f}\omega_0^n$$

$\omega_0 = i\, g_{j\bar k}\, dz^j \wedge d\bar z^k$ $\Longleftrightarrow$ $\det\left[g_{j\bar k} + \frac{\partial^2}{\partial z^j \partial \bar z^k}\varphi\right] = e^{\varphi + f} \det[g_{j\bar k}]$

cpx Monge-Ampere eqn (nonlinear elliptic)

Methods ① Continuity method : $\mathrm{Ric}(\omega_t) = -t\cdot\omega_t + (1-t)\,\mathrm{Ric}(\omega_0)$ $t \in [0,1]$

$$\Leftrightarrow \det\left[g_{j\bar k} + \frac{\partial^2}{\partial z^j \partial \bar z^k}\varphi\right] = e^{\varphi + t\cdot f} \det[g_{j\bar k}]$$

② Kähler-Ricci flow : $\begin{cases} \frac{d}{dt}\omega_t = -\mathrm{Ric}(\omega_t) - \omega_t \\ \omega_t|_{t=0} = \omega_0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \det\left[g_{j\bar k} + \frac{\partial^2}{\partial z^j \partial \bar z^k}\varphi\right] = e^{\dot\varphi + \varphi + f} \det[g_{j\bar k}]$$

parabolic MA

§3. YTD conjecture

Suppose X: Fano ($\Leftrightarrow C_1(X)>0$)

Thm (Matsushima 1957) $\exists$ KE ($\underset{(cscK)}{}$) $\Rightarrow$ $\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(X))$: reductive

e.g.) $Bl_p(\mathbb{CP}^2)$ no KE

Thm (Futaki 1983) $\exists$ KE $\Rightarrow$ $\mathrm{Fut}_{C_1(X)} : \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(X)) \longrightarrow \mathbb{C}$ vanish

Def) $\mathrm{Fut}_{C_1(X)}(v) := \int_X v(f)\,\omega^n$ where $\begin{cases} \omega \in C_1(X) \\ \mathrm{Ric}\,\omega - \omega = i\partial\bar\partial f \end{cases}$

Rmk) well-defined on projective normal variety

Thm (Tian 1990) $n=2$ $\exists$ KE $\Leftrightarrow$ reductivity $\Leftrightarrow$ Fut $\equiv 0$

Consider (X, L) : polarized mfd ($\Leftrightarrow$ cpt Kähler mfd X & $C_1(L)>0$)

Notes: • (Kodaira's embedding) X: projective
• $L = K_X^{-1} \Rightarrow X$: Fano

Yau-Tian-Donaldson conjecture (93, 97, 02). (X, L) : polarized
$\exists$ cscK $\omega \in C_1(L) \Leftrightarrow$ K-stable.

- Thm (Donaldson '05 / Stoppa '09) "$\Rightarrow$" for $\mathrm{Aut}(X)$: discrete
- Thm (Zhou-Zhu '08 / Donaldson '09) "$\Leftrightarrow$" for toric polarized & $n=2$
- Thm (Chen-Donaldson-Sun / Tian '14) "$\Leftrightarrow$" for Fano ($L = K_X^{-1}$)

Note: cscK $\omega \in C_1(K_X^{-1}) \Leftrightarrow \omega$: KE ($\because$ $\partial\bar\partial$-lemma & max. prin.)

§4. K-Stability

Suppose (X, L): polarized mfd

Def. ① Test configuration of (X, L) is $\mathcal{L} \to \mathcal{X} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}$ with equiv. $\mathbb{C}^*$-action s.t.

- $X_t := \pi^{-1}(t) \cong X$ for $\forall t \neq 0$
- $\mathcal{L}|_{X_t} \cong L$ ample
- $\mathcal{X}$ is normal var. (Li-Xu '14)
- X_0 : normal (special test config.) Tian

(equivalently, $X \hookrightarrow \mathbb{CP}^N$ & $\lambda: \mathbb{C}^* \hookrightarrow GL(N+1, \mathbb{C})$

$\mathcal{X} = \overline{\{(\underset{\lambda(t)\cdot X}{X_t}, t)\}} \subset \mathbb{CP}^N \times \mathbb{C}$)

② Test configuration is trivial if $\mathcal{X} \cong X \times \mathbb{C}$

③ (X, L) is K-semistable if $Fut_{G_1(L)}(\mathcal{X}) := Fut_{G_1(L)}(X_0) \geq 0$ for $\forall \mathcal{X}$

④ (X, L) is K-stable if $Fut_{G_1(L)}(\mathcal{X}) > 0$ for $\forall \mathcal{X} \not\cong X \times \mathbb{C}$

(Motivation) Fix $\omega_0 \in c_1(L)$

$$\mathcal{K} := \{ \varphi \in C^\infty(X, \mathbb{R}) \; ; \; \omega = \omega_0 + i\partial\bar{\partial}\varphi > 0 \}$$

$$\mathcal{M}(\varphi) := \int_0^1 \int_X \dot{\varphi}_t (\bar{S} - S_t) \omega_t^n \, dt \quad , \quad \omega_t = \omega_0 + \varphi_t, \; \varphi_t|_0 = 0, \; \varphi_t|_1 = \varphi$$

(Mabuchi functional or K-energy)

Critical pt of $\mathcal{M} \Leftrightarrow$ cscK in $c_1(L)$

Informaly "pt at ∞" in $\mathcal{K}$ $\longleftrightarrow$ X_0 in $\mathcal{X}$

§5. Manifolds with Large Symmetry

Def X is toric if $(\mathbb{C}^*)^n \curvearrowright X$ & $X_0 := (\mathbb{C}^*)^n \subset X$ dense

Thm (Wang–Zhu '04) X: toric Fano $\Rightarrow$ $\exists$ Kähler–Ricci soliton

$\exists$ KE $\Leftrightarrow$ Fut$(X) = 0$ $\Leftrightarrow$ bar$(P) = 0$ (Mabuchi; P: moment polytope)

$(\mathbb{C}^*)^n \xrightarrow{\text{Log}} \mathbb{R}^n \longrightarrow P \subset \mathbb{R}^n$

{psh fn} $\longleftrightarrow$ {cvx fn}

cpx MA $\longleftrightarrow$ real MA

$\int_X \omega^n \longmapsto \int_P$ (μ: moment map)

Generalization: G: reductive Lie gp $\supset T = (\mathbb{C}^*)^r$: maximal torus

$B \subset G \curvearrowright X$ & $\exists$ open & dense B-orbit in X

{toric} $\subset$ {group compactification} $\subset$ {symm. var.} $\subset$ {spherical}

Thm (Delcroix '17) X: smooth Fano gp comp.

$\exists$ KE $\Leftrightarrow$ $\text{bar}_{DH}(P^t) \in \frac{n}{2}\rho + \Xi$

Thm (Li–Tian–Zhu '20) generalize to $\mathbb{Q}$-Fano var. gp. comp.

Thm (Delcroix '20) generalize to smooth symm. var.

Thm (Lee–Park–Y.) X: All smooth Fano symm w/ $\text{Pic}\, t = 1$ $\Rightarrow$ $\exists$ KE

References:

Szekelyhidi – An introduction to extremal Kähler metrics

Donaldson – Stability of alg. var & Kähler geometry

Phong & Sturm – Lectures on Stability & constant scalar curv.

Deformations of Kähler-Einstein metrics and Kähler-Ricci flows

Sungmin Yoo (IBS-Center for Geometry and Physics)

The 16th KIAS Winter School on Geometry

2021.01.26

Table of Contents

1 Motivation

2 Main Results

3 Key ingredients

Kähler-Einstein metric

Let X: compact Kähler manifold

Theorem (Aubin/Yau 1978)

If $c_1(X) < 0$, *then* $\exists! \omega_{KE}$ *s.t.* $\mathrm{Ric}(\omega_{KE}) = -\omega_{KE}$

Let X: general type and fix $\omega_0 \in -c_1(X)$.

$\partial\overline{\partial}$-lemma $\Rightarrow \mathrm{Ric}(\omega_0) + \omega_0 = i\partial\overline{\partial}F$ for some $F \in C^\infty(X)$.

Definition (Elliptic MA eqn)

Find a solution $\varphi \in C^\infty(X)$ *satisfying*

$$\begin{cases} (\omega_0 + i\partial\overline{\partial}\varphi)^n = e^{\varphi+F}\omega_0^n \\ \omega_0 + i\partial\overline{\partial}\varphi > 0. \end{cases}$$

Then $\omega_{KE} = \omega_0 + i\partial\overline{\partial}\varphi$.

Theorem (Cao, 1985)

For all $t > 0$, there exists a family of Kähler metrics $\omega(t)$ on X satisfying

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\omega(t) = -\mathrm{Ric}(\omega(t)) - \omega(t), \\ \omega(t)|_{t=0} = \omega_0. \end{cases}$$

Moreover, $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = \omega_{KE}$. This is called the Kähler-Ricci flow (KRF).

Definition (Parabolic MA eqn)

Find a solution $\varphi \in C^\infty(X \times [0,\infty))$ satisfying

$$\begin{cases} (\omega_0 + i\partial\overline{\partial}\varphi)^n = e^{\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \varphi + F}\omega_0^n, \\ \varphi(t)|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Define $\omega(t) := \omega_0 + i\partial\overline{\partial}\varphi(t)$.

Fiberwise KE and KRF

Setting

Let $\pi : \mathcal{X}^{n+1} \to Y^1$ be a family of canonically polarized mfds, i.e.,

- *$\pi : \mathcal{X} \to Y$: proper holomorphic surjective submersion*
- *$X_y := \pi^{-1}(y)$: general type, i.e., $c_1(X_y) < 0$*

Theorem (Ehresmann's fibration theorem)

Let $\pi : \mathcal{X} \to Y$: proper surjective submersion

Then $X_y \cong X_{y'}$ (diffeomorphic) for all $y, y' \in Y$

Let ω: d-closed $(1,1)$-form on $\mathcal{X}$ s.t. $\omega_y := \omega|_{X_y} > 0$ and $[\omega_y] = -c_1(X_y)$.

$\Rightarrow \omega_y^{KE} = \omega_y + i\partial\overline{\partial}\psi_y$: KE metric on X_y (Aubin/Yau)

$\omega_y(t) = \omega_y + i\partial\overline{\partial}\varphi_y(t)$: KRF on X_y (Cao)

Fiberwise KE and KRF

$\Rightarrow \exists\ \rho := \omega + i\partial\overline{\partial}\psi$: d-closed $(1,1)$-form on $\mathcal{X}$ s.t. $\rho|_{X_y} = \omega_y^{KE}$

$\exists\ \omega(t) := \omega + i\partial\overline{\partial}\varphi$: d-closed $(1,1)$-form on $\mathcal{X}$ s.t. $\omega(t)|_{X_y} = \omega_y(t)$

Remark

- ρ *is called the fiberwise KE.*
- $\omega_{WP} = \int_{\mathcal{X}/Y} \rho^{n+1}$ *Weil-Petersson metric.*
- $\omega(t)$ *is called the fiberwise KRF.*
- $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = \rho$

Schumacher and Berman's results

Theorem (Schumacher, 2012)

- $\rho \geq 0$ *on* $\mathcal{X}$.
- $\rho > 0$ *on* $\mathcal{X}$ *if* $\pi : \mathcal{X} \to Y$ *is effectively parametrized.*

Theorem (Paun, 2018)

ρ *extends across the singularities of the map* π *as a positive current.*

Theorem (Berman, 2013)

- $\omega(t) \geq 0$ *on* $\mathcal{X}$ *if* $\omega \geq 0$.
- $\omega(t) > 0$ *on* $\mathcal{X}$ *if* $\omega > 0$ *and* $\pi : \mathcal{X} \to Y$ *is effectively parametrized.*

Goal: Study a holomorphic family of non-compact complete Kähler mfds!

Table of Contents

1 Motivation

2 Main Results

3 Key ingredients

Generalization to noncompact manifolds

Question: Which non-compact mfd admits a complete KE metric?

Definition (Bounded geometry)

We say that (X, ω) has bounded geometry of order k if for each $p \in X$ there exists a holomorphic chart (U_p, ξ_p) centered at p and constants $r, C, C_k > 0$ independent of p satisfying

(i) $\mathbb{B}_r(0) \subset V_p := \xi_p(U_p) \subset \mathbb{C}^n$,

(ii) $\frac{1}{C}\left(\delta_{\alpha\bar{\beta}}\right) \leq \left(g_{\alpha\bar{\beta}}\right) \leq C\left(\delta_{\alpha\bar{\beta}}\right)$,

(iii) $\left\|g_{\alpha\bar{\beta}}\right\|_{C^k(V_p)} \leq C_k$.

where $\omega = ig_{\alpha\bar{\beta}} d\xi^\alpha \wedge d\overline{\xi^\beta}$ for the coordinates $\xi_p = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$.

For any functions $u \in C^\infty(X)$, we define a norm by

$$\|u\|_{k+\epsilon} := \sup_{p \in X} \{\left\|u \circ \xi_p^{-1}\right\|_{C^{k+\epsilon}(V_p)}\},$$

$\tilde{C}^{k+\epsilon}(X)$:= Banach completion of $\{u \in C^\infty(X) : \|u\|_{k+\epsilon} < \infty\}$.

KE and KRF on complete Kähler manifolds

Theorem (Cheng-Yau, 1980)

- (X, ω): *complete Kähler mfd with bounded geometry*
- $\mathrm{Ric}(\omega) + \omega = i\partial\overline{\partial}F$ *for some fn* $F \in \tilde{C}^{\infty}(X)$

$\Longrightarrow \exists!$ *complete KE metric* ω_{KE} *with* $\mathrm{Ric}(\omega_{KE}) = -\omega_{KE}$

Theorem (Chau, 2004)

- (X, ω): *complete Kähler mfd with bounded curvatures*
- $\mathrm{Ric}(\omega) + \omega = i\partial\overline{\partial}F$ *for some smooth bounded fn* F *on* X

$\Longrightarrow \exists$ *Kähler-Ricci flow* $\omega(t)$ *for all* $t > 0$ *and* $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = \omega_{KE}$

Theorem (Wu-Yau, 2020)

Let (X, ω): *complete Kähler mfd with* $-C_1 < Hol(\omega) < -C_2 < 0$

$\Longrightarrow \exists!$ *complete KE metric* ω_{KE} *with* $\mathrm{Ric}(\omega_{KE}) = -\omega_{KE}$

Concrete and Fundamental Examples

Definition

A smooth bdd domain $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ *is called a strongly pseudoconvex domain if* $\exists$ *a smooth strictly plurisubharmonic defining function* r *on* $\overline{\Omega}$, *i.e.,*

- $\Omega = \{r(z) < 0\}, \quad \partial\Omega = \{r(z) = 0\}, \quad dr \neq 0$ *on* $\partial\Omega$ *(def. fn)*
- $i\partial\overline{\partial} r > 0$ *on* $\overline{\Omega}$ *(str. psh)*

Remark

- $\{$*strongly convex domains*$\} \subset \{$*strongly pseudoconvex domains*$\}$
- *bdd pcx. domain = increasing union of str. pcx. domains*

Concrete and Fundamental Examples

Proposition (Cheng-Yau)

Let Ω be a bounded strongly peudoconvex domain in $\mathbb{C}^n$.

$\omega := i\partial\overline{\partial}(-\log(-r))$ has bdd geometry, $\mathrm{Ric}(\omega) + \omega = i\partial\overline{\partial}F$, $F \in \tilde{C}^\infty(\Omega)$.

Proposition (Cheng-Yau)

Let (X, ω_0) be a Kähler manifold with $\mathrm{Ric}(\omega_0) < 0$

Let Ω be a bounded strongly peudoconvex domain in X.

Then $\omega := -\mathrm{Ric}(\omega_0) + i\partial\overline{\partial}(-\log(-r))$ has bdd geometry and satisfies

$\mathrm{Ric}(\omega) + \omega = i\partial\overline{\partial}F$ for some $F \in \tilde{C}^\infty(\Omega)$.

Remark

In the above case, we have asymptotic boundary estimates of ω_{KE} (Cheng-Yau, Lee-Melrose)

Family of bounded strongly peudoconvex domains

Definition

$\pi : D \to S$ *is a holomorphic family of str. pcx. domains if*

- $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*: coordinate projection map* $\pi(z_1, \ldots, z_n, s) = s$
- D*: smooth domain in* $\mathbb{C}^{n+1}$, $\quad S := \pi(D)$
- $D_y := D \cap \pi^{-1}(y)$*: smooth str. pcx. domain in* $\mathbb{C}^n$, $\ \forall y \in S$

$\Rightarrow \exists\ \omega$: d-closed smooth $(1,1)$-forms on D such that $\omega_y := \omega|_{D_y}$ is a complete Kähler metric with bounded geometry.

$\Rightarrow \exists\ \rho$: fiberwise KE on D

Theorem (Choi, 2015)

- $\rho > 0$ *on* D *if* D *is strongly pseudoconvex in* $\mathbb{C}^{n+1}$.
- $\rho \geq 0$ *on* D *if* D *is pseudoconvex in* $\mathbb{C}^{n+1}$.

Results

Setting

- $\pi : X \to Y$: *holomorphic surjective submersion*
- ω_X: *Kähler form on* X *satisfying* $\mathrm{Ric}(\omega_y) < 0$, *where* $\omega_y := \omega_X|_{X_y}$
- D: C^∞*-domain in* X, $\quad S := \pi(D)$
- $D_y := D \cap \pi^{-1}(y)$: C^∞*-bdd. str. pcx. domain in* X_y, $\forall y \in S$
- $\pi : \overline{D} \to S$: *proper* $(\Rightarrow \overline{D_y} := \overline{D} \cap \pi^{-1}(y)$: *diffeomorphic,* $\forall y \in S)$

Theorem 1 (Choi, Y-)

If D *is strongly pseudoconvex in* X, ρ *is positive definite on* D.

Results

Setting

- $\pi : X \to Y$: *holomorphic surjective*
- W: $\exists$ *analytic set containing all singular values of* π *and* $\pi|_{\partial D}$ *in* S
- *For all regular fibers, the assumptions of Theorem 1 hold.*

Theorem 2 (Choi, Y-)

If D *admits a complete Kähler metric* $\tilde{\omega}_D$ *satisfying* $Scal(\tilde{\omega}_y) > C$,

then ρ *extends to* D *as a positive current.*

Results

On the other hand, we also have $\omega(t)$: fiberwise KRF

Theorem 3 (Choi, Y-)

Suppose that $\omega \geq 0$ on D and strictly positive at least one point on each fiber D_y. Then $\omega(t) > 0$ on D for all $t > 0$

Proposition

If D is pseudoconvex in $\mathbb{C}^{n+1}$, there exist a defining function r of D s.t. $\omega := i\partial\overline{\partial}(-\log(-r))$ satisfies the above assumption.

Corollary

- *$\rho \geq 0$ on D if D is pseudoconvex in $\mathbb{C}^{n+1}$.*

Table of Contents

1 Motivation

2 Main Results

3 **Key ingredients**

Horizontal lift and Geodesic curvature

$\pi : \mathcal{X} \to Y$ with $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = 1$

τ: a d-closed smooth real $(1,1)$-form on $\mathcal{X}$ s.t. $\tau|_{X_y} > 0$

$v := \frac{\partial}{\partial s} \in T'_y(Y)$

Definition

- v_τ: *horizontal lift* of v *is a* $(1,0)$ *vector field satisfying*
  - **(1)** $d\pi(v_\tau) = v$
  - **(2)** $< v_\tau, w >_\tau = 0$ *for* $\forall w \in T'X_y$
- $c(\tau)$: *geodesic curvature* of τ *is defined by*

$$c(\tau) = < v_\tau, v_\tau >_\tau$$

Remark

- $\tau^{n+1} = c(\tau) \cdot \tau^n \wedge \pi^*(ids \wedge d\bar{s})$
- $\tau \geq 0 \Longleftrightarrow c(\tau) \geq 0 \quad (\tau > 0 \Longleftrightarrow c(\tau) > 0)$

PDE of geodesic curvatures

For each fiber D_y, consider geodesic curvatures $c(\rho)$ and $c(\omega(t))$.

Proposition (Schumacher)

$$(-\Delta + id)\, c(\rho) = \|\overline{\partial} v_\rho\|^2,$$

where Δ is the Laplace-Beltrami operator of ω_y^{KE}.

Proposition (Berman)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_t + id\right) c(\omega(t)) = \|\overline{\partial} v_{\omega(t)}\|^2,$$

where Δ_t is the Laplace-Beltrami operator of $\omega_y(t)$.

Use a non-compact version of elliptic and parabolic maximum principle!

Theorem (Almost Maximum Principle)

Let (X, g) be a complete Riemannian manifold

Let f be a bounded from above smooth function on X.

- *(Omori, 1967) If sectional curvatures are bounded from below, there exists a sequence of points $\{x_k\} \in X$ satisfying*

$$f(x_k) > \limsup f - \frac{1}{k}, \quad |df(x_k)| < \frac{1}{k}, \quad \text{and} \quad \mathrm{Hess} f(x_k) < \frac{1}{k} g.$$

- *(Yau, 1975) If Ricci curvatures are bounded from below, there exists a sequence of points $\{x_k\} \in X$ satisfying*

$$f(x_k) > \limsup f - \frac{1}{k}, \quad |df(x_k)| < \frac{1}{k}, \quad \text{and} \quad \Delta f(x_k) < \frac{1}{k}.$$

Parabolic Maximum principle for KRF

Let (X, g) be a complete Riemannian manifold with bounded curvatures

Theorem (Weak maximum principle (Shi))

Let f be a smooth bounded function on $X \times [0, T)$ satisfying

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_t\right) f \geq 0 \quad \text{whenever } f \leq 0.$$

If $f \geq 0$ on X at $t = 0$, then $f \geq 0$ on $X \times [0, T)$.

Theorem (Strong maximum principle)

Suppose that $\sup_{X \times [0,T)} f(x,t) \geq 0$ and $f(x,0) > 0$ at some point $x \in X$.

Then $f(x,t) > 0$ on $X \times [0, T)$.

Parabolic Maximum principle for KRF

Theorem (Weak maximum principle (Ni))

Let f be a smooth function on $X \times [0, T)$ satisfying

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_t\right) f \geq 0 \quad \textit{whenever } f \leq 0.$$

Assume that $\exists c > 0$ such that $f_- := -\min\{f, 0\}$ satisfies

$$\int_0^T \int_X (-r)^c (f_-)^2 \, dV_t dt < \infty.$$

If $f \geq 0$ on X at $t = 0$, then $f \geq 0$ on $X \times [0, T)$.

Thank you for your attention.

Gauss curvature flow with an obstacle

Taehun Lee

KIAS

The 16th KIAS Winter School on Geometry
January 20, 2021

Gauss curvature flow (GCF)

Let $X_0 : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ be a smooth immersion.

Gauss curvature flow If $X : M^n \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ satisfies

$$\frac{\partial}{\partial t} X(p, t) = -K(p, t)\nu(p, t)$$

with $X(\cdot, 0) = X_0$, then the one-parameter family of hypersurfaces $\Sigma_t = X(M^n, t)$ is said to be the Gauss curvature flow.
Here, $K(p, t)$ is the Gauss-Kronecker curvature of Σ_t at $X(p, t)$ and $\nu(p, t)$ is the outward unit normal vector to Σ_t at $X(p, t)$.

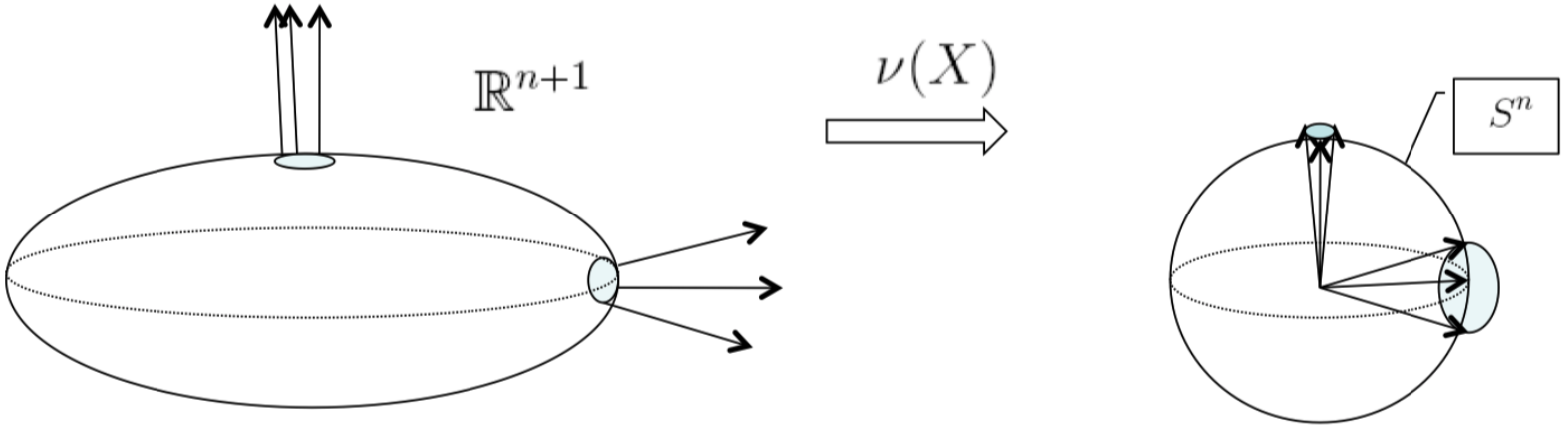
One of the higher dimensional versions of the curve shortening flow.

Tumbling stone on a beach - phenomena in nature - Firey



Modeling

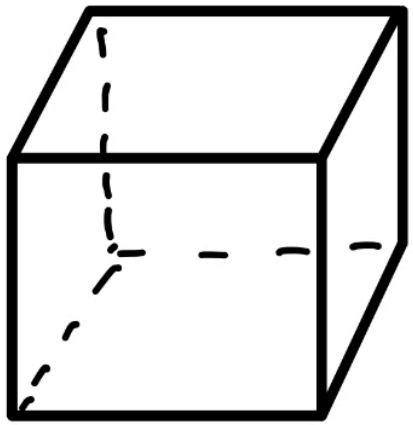
A stone is subject to wear under impact from any random angle by the sea.

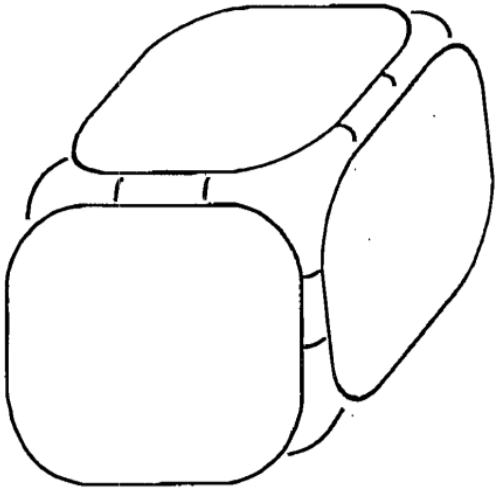


$$K(X) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\mathrm{vol}(\nu(B_\rho(X))}{\mathrm{vol}(B_\rho(X))} \quad \text{(Gauss Curvature)}$$

Erosion is heuristically proportion to the measure of image of the Gauss map.

Example





Theorem (Hamilton '94)

If a hypersurface has flat sides then the flat sides still exist under the Gauss curvature flow for some time.

If the cube evolves under the mean curvature flow, then the flat sides will disappear immediately. (SMP, heat exchange)

Volume change with a constant speed

Under GCF, the volume $V(t)$ enclosed by Σ_t satisfies

$$\frac{\partial}{\partial t} V(t) = -\int_{\Sigma_t} K d\sigma_{\Sigma_t} = -|\mathbb{S}^n|$$

by an analogy of Gauss-Bonnet theorem.

Apply maximum principle to $\frac{\partial}{\partial t} K = K(h^{-1})^{ij} \nabla_i \nabla_j K + K^2 H$

GCF must shrink to a point at $T_* = V(0)/|\mathbb{S}^n|$.

Relation to (L_p-)Minkowski problem

Given a Borel measure $\mu \geq 0$ on $\mathbb{S}^{n-1}$, find a convex body K such that $S_{K,p} = \mu$. (Existence and uniqueness?)

convex body K $\quad\longleftrightarrow\quad$ L_p-surface area measure $S_{K,p} = h_K^{1-p} dS_K$

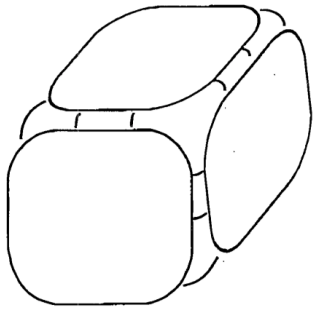
By the Brunn-Minkowski inequality, solutions to (classical) Minkowski problem can be given by

$$\inf \left\{ \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_L(X) d\mu(X), L \in K^n, V(L) \geq 1 \right\}$$

and the uniqueness follows from the equality condition on the Brunn-Minkowski inequality.

The self-similar solution to the Gauss curvature flow is the solution to L_0-Minkowski problem ($p = 0$, so called logarithmic Minkowski problem).

Preservation of flat sides

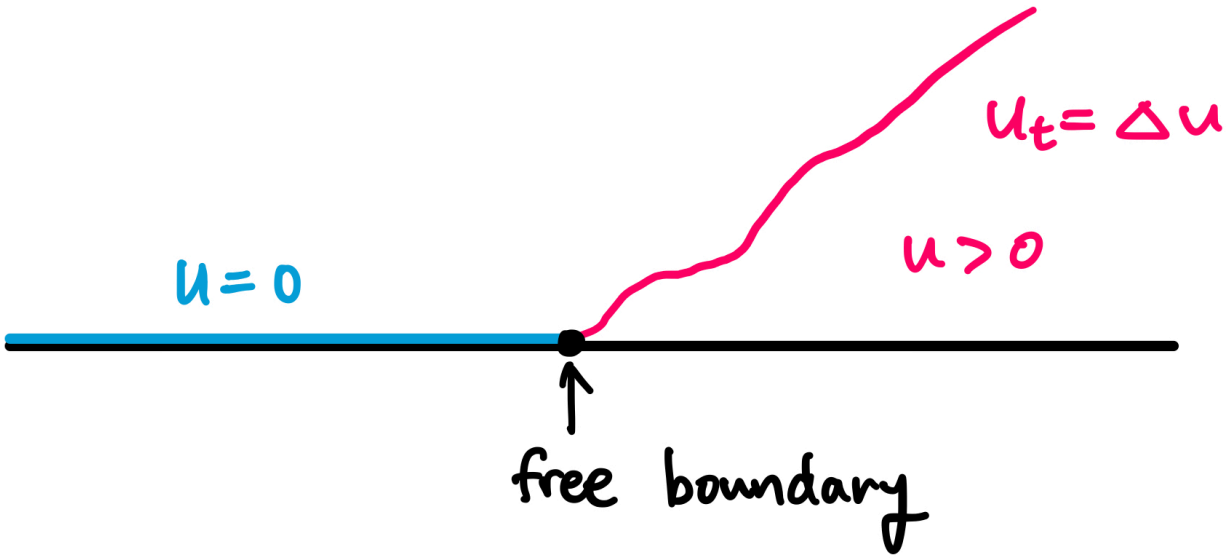


Λ: flat sides. $\Gamma = \partial\Lambda$: free boundary, the interface between flat parts and non-flat parts.

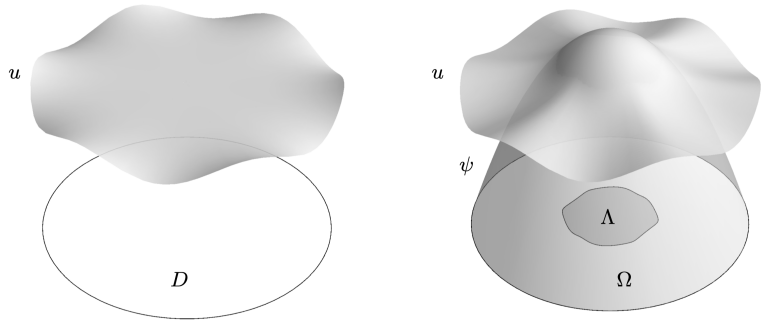
- [Daskalopoulos–Hamilton '99] short time; [Daskalopoulos–Lee '04] long time.
- Chopp–Evans–Ishii showed that if X_0 is smooth, free boundaries does not move during some waiting time period.
- Choi found that the optimal rate of movement is $C^{1,\frac{1}{n-1}}$.

Therefore, regularity near free boundary is key to understand how the stone evolves.

Flat sides = one phase problem



GCF with flat sides can be formulated as obstacle problem ($\psi \equiv 0$).



Membrane with obstacle

Obstacle problem for membrane (variational inequality):

$$\underset{u \geq \psi}{\text{minimize}} \quad \int_D \frac{1}{2} |\nabla u|^2 dx$$

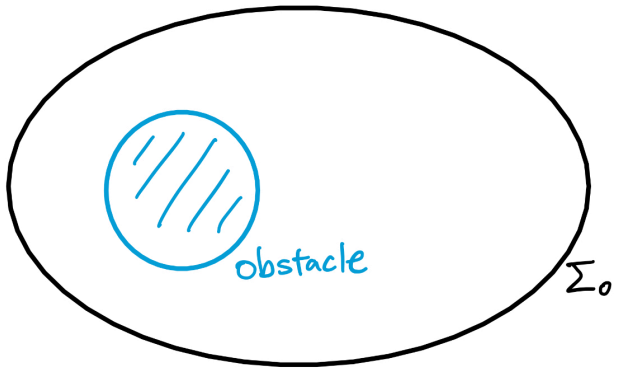
Then $\Delta u = 0$ in $\{u > \psi\}$ and $\Delta u \leq 0$ in D.

Linear operator $\rightarrow$ "flat side" $=$ "obstacle"
Nonlinear operator $\rightarrow$ "flat side" $\neq$ "obstacle"

GCF with flat side $\neq$ GCF with obstacle

Question: What is "obstacle problem" for GCF?

Model for the flow with an obstacle



When a stone have a hard core, the hypersurface cannot penetrate the hard core.

Difference with the flat sides problem:

growing contact set vs shrinking flat sides

Focus on the neighborhood of the free boundary since this part is important as in flat sides problem.

Main results - stationary obstacle

Theorem (Lee–L. '18, $n = 2$, $\alpha \leq 1$, stationary)

Let X_0 and Ψ be smooth strictly convex closed hypersurfaces. Then GCF with an obstacle has a unique solution for $t \in [0, \infty)$ with the optimal $C^{1,1}$-regularity. In particular,

1. $0 \leq \lambda_i \leq C$, *λ_i: principal curvature.*
2. *On the non-coincidence set $X(x,t) \notin \Phi$,*

$$0 < c(d(X, \Lambda)) \leq \lambda_i(X) \leq C,$$

where $d(X, \Lambda)$ denotes the distance from x to $\{X \in \Phi\}$.

3. *There is a finite time T_* such that $\Sigma_t = \Phi$ for all $t \geq T_*$.*

K becomes zero on the free boundary.

Main results - moving obstacle

Theorem (Lee–L., all n and $\alpha > 0$, varying obstacle)

Let X_0 and Ψ be smooth strictly convex closed hypersurfaces. Assume that Ψ is a slowly contracting obstacle. Then the Gauss curvature flow with an obstacle has a unique solution for $t \in [0, \infty)$ with the optimal $C^{1,1}$-regularity. In particular,

1. *The principal curvatures λ_i satisfy $c(X_0, \Phi) \leq \lambda_i \leq C(X_0, \Phi)$.*
2. *There is a finite time T_* such that $\Sigma_t = \Phi$ for all $t \geq T_*$.*

Free boundary in various fields

Physical phenomena
rolling stones, melting of ice (Stefan problem)

Geometry
collapsed geometry, degenerate solution to Minkowski problem

Economics and Finance
portfolio selection, American option pricing, transaction cost

Thank you!

References I

- Ben Andrews, *Gauss curvature flow: the fate of the rolling stones*, Invent. Math. **138** (1999), no. 1, 151–161. MR 1714339
- Simon Brendle, Kyeongsu Choi, and Panagiota Daskalopoulos, *Asymptotic behavior of flows by powers of the Gaussian curvature*, Acta Math. **219** (2017), no. 1, 1–16. MR 3765656
- D. Chopp, L. C. Evans, and H. Ishii, *Waiting time effects for Gauss curvature flows*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), no. 1, 311–334. MR 1722203
- P. Daskalopoulos and R. Hamilton, *The free boundary in the Gauss curvature flow with flat sides*, J. Reine Angew. Math. **510** (1999), 187–227. MR 1696096

References II


P. Daskalopoulos and Ki-Ahm Lee, *Worn stones with flat sides all time regularity of the interface*, Invent. Math. **156** (2004), no. 3, 445–493. MR 2061326


William J. Firey, *Shapes of worn stones*, Mathematika **21** (1974), 1–11. MR 362045


Richard S. Hamilton, *Worn stones with flat sides*, A tribute to Ilya Bakelman (College Station, TX, 1993), Discourses Math. Appl., vol. 3, Texas A & M Univ., College Station, TX, 1994, pp. 69–78. MR 1423370


Arshak Petrosyan, Henrik Shahgholian, and Nina Uraltseva, *Regularity of free boundaries in obstacle-type problems*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 136, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. MR 2962060

References III


Kaising Tso, *Deforming a hypersurface by its Gauss-Kronecker curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), no. 6, 867–882. MR 812353

Existence and uniqueness results on capillary minimal surfaces via Weierstrass representation formula

EUNGBEOM YEON

Table of Contents

1. Capillary minimal surfaces
2. Preliminares
3. Capillary minimal surfaces outside the unit ball B^3

1 Capillary minimal surfaces

2 Preliminares

3 Capillary minimal surfaces outside the unit ball B^3

Definition of capillary minimal surfaces

A **capillary minimal surface** Σ in a domain U is a minimal surface Σ which meets ∂U in a constant contact angle along ∂U. When the contact angle is a right angle, the surface is called a **free boundary minimal surface**.

Characterization results on capillary minimal surfaces

Nitsche (1985)	The only immersed free boundary minimal disk in B^3 is an equitorial disk
Ros-Souam (1994)	Generalized Nitsche's result to space forms S^3, H^3
Fraser-Schoen (2014)	Generalized Nitsche's theorem to B^n
Mcgrath (2018)	Embedded F.B.M.A. in B^3 symmetric to three coordinate planes is a critical catenoid
Choe (2002)	Generalized Nitsche's result to domains bounded by several planes and spheres

1 Capillary minimal surfaces

2 Preliminares

3 Capillary minimal surfaces outside the unit ball B^3

Weierstrass represantation formula

The pair (g, dh) is called the Weierstrass data and it consist of a Gauss map $g(z) : \Sigma \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and a holomorphic differential $dh = dx_3 + i dx_3^*$ where x_3 is the third coordinate function defined on the surface. $X : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ can be represented by the real part of the holomorphic curve as follows.

$$X(p) = \mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{g} - g\right), \frac{i}{2}\left(\frac{1}{g} + g\right), 1 \right) dh.$$

Weierstrass represantation formula

With the Weierstrass data, various geometric invariants can also be represented by the data.

$$ds^2 = \left(\frac{1}{2}(|g| + |g|^{-1})|dh|\right)^2 = \Lambda^2 |dz|^2,$$

$$b(v, v) = \mathrm{Re}\left(\frac{dg}{g}(v) \cdot dh(v)\right)$$

where v is a tangent vector to the surface Σ.

$$K = -\left(\frac{4\left|\frac{dg}{g}\right|}{(|g| + |g|^{-1})^2 |dh|)}\right)^2.$$

Examples of minimal surfaces with Weierstrass data

Enneper's surface and the higher order Enneper's surface have the following Weierstrass data defined on $\mathbb{C}$.

$$g(z) = z^k$$
$$dh = z^k dz.$$

We can deform the Gauss map to get a surface with the Weierstrass data as follows.

$$g(z) = z^k + P(z)$$
$$dh = g(z)dz$$

where $P(z)$ is a polynomial of degree $n \leq k - 1$.

Examples of minimal surfaces with Weierstrass data

$$g(z) = z\frac{z^2 - R^2}{R^2 z^2 - 1}$$

$$dh = \left(1 - \frac{1}{R^2 + R^{-2}}(z^2 + z^{-2})\right)\frac{dz}{z}.$$

The above Weierstass data represents two Enneper's surfaces joined by the catenoidal neck. As it is geometrically observed that the flux vector along the closed curve on the catenoidal neck is a nonvanishing vector.

Field of line elements

A **smooth field of line elements** is a vector field defined on a region that is a family of curves such that at each point the vector field is tangent to a curve through that point.
A field of line elements cannot be extended to a single point p then the point p is called a **singularity of the field of line elements**.
An **index** of an isolated singularity p of the field of line elements is defined as j where $2\pi j$ is a rotation number around a singular point p.

Examples of singularities

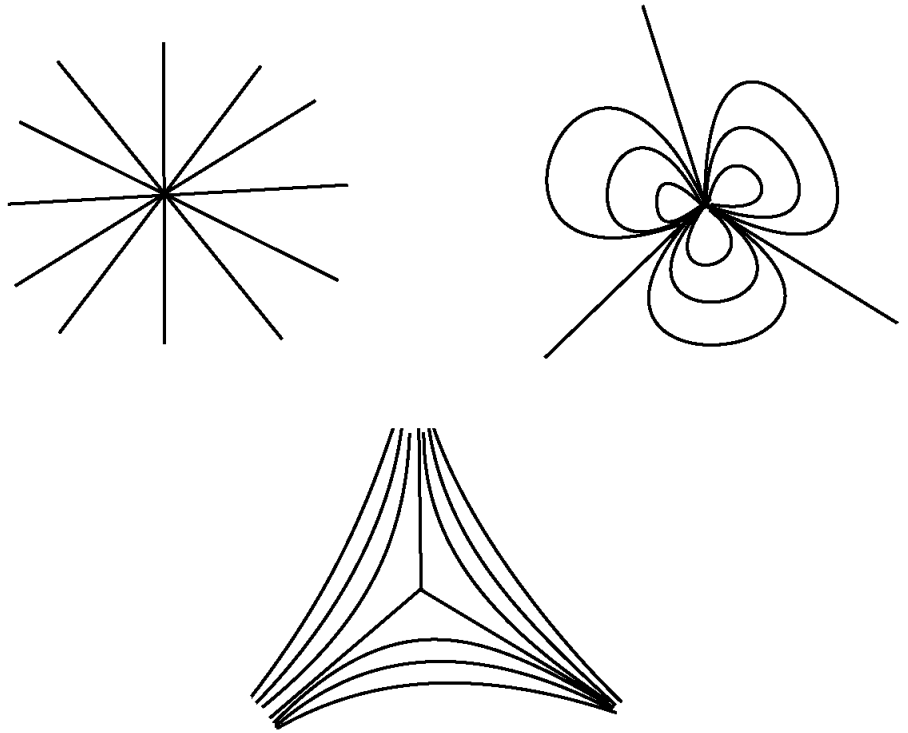


Figure: Examples of field of line elements with isolated singularities of index 1, $\frac{5}{2}$ and $-\frac{1}{2}$.

We have the following theorem.

Poincaré-Hopf Theorem ([7])

If F is a field of line elements on a closed surface S of genus g with finite number of singularities p_i for $i \in I$ where I is a finite index set. And denote j_{p_i} as the index of p_i. then

$$\Sigma j_{p_i} = 2 - 2g.$$

1 Capillary minimal surfaces

2 Preliminares

3 Capillary minimal surfaces outside the unit ball B^3

Results on capillary minimal surfaces outside the unit ball

Theorem 1

Let $X \in (C^2(D', \mathbb{R}^3) \cap C^1(\overline{D}', \mathbb{R}^3))$ be a capillary minimal surface in $\mathbb{R}^3 \setminus B^3$ with finite total curvature and one embedded end. Then it must be either part of the plane or part of the catenoid.

Results on capillary minimal surfaces outside the unit ball

Theorem 2

There does not exist a capillary minimal immersion $X \in (C^2(D', \mathbb{R}^3) \cap C^1(\overline{D}', \mathbb{R}^3))$ with finite total curvature, one end asymptotic to the end of the Enneper's surface, and vanishing flux vector on the first homology class of the surface.

Results on capillary minimal surfaces outside the unit ball

Theorem 3

Let U be a convex domain in $\mathbb{R}^3$ which is bounded by $k(k \geq 1)$ spheres. Let $X \in C^{2,\alpha}(\overline{D}', \mathbb{R}^3)$ be a capillary minimal surface in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{U}$ with finite total curvature and one embedded end. If $k > 1$, the surface with a catenoidal end cannot exist. Furthermore, the surface with a planar end must be part of the plane.

Two important Lemmas

Lemma 1

Let a minimal surface Σ be as in the main theorem. Let

$$\Phi(z)dz^2$$

be a Hopf differential defined on the surface. And put $z^2\Phi(z) = \alpha + i\beta$.

Then the harmonic functions α, β satistifes

$$\alpha = \beta = 0$$

on the whole surface when the surface has the planar end. In case the surface has the catenoidal end,

$$\alpha = A,\ \beta = 0$$

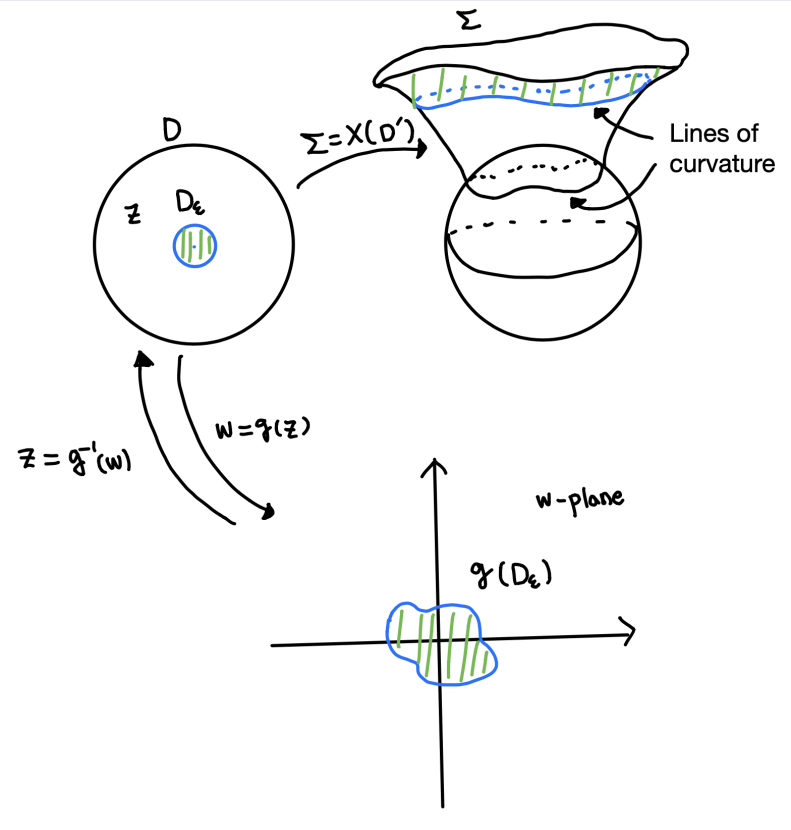
for some nonzero constant A.

Two important Lemmas

Lemma 2

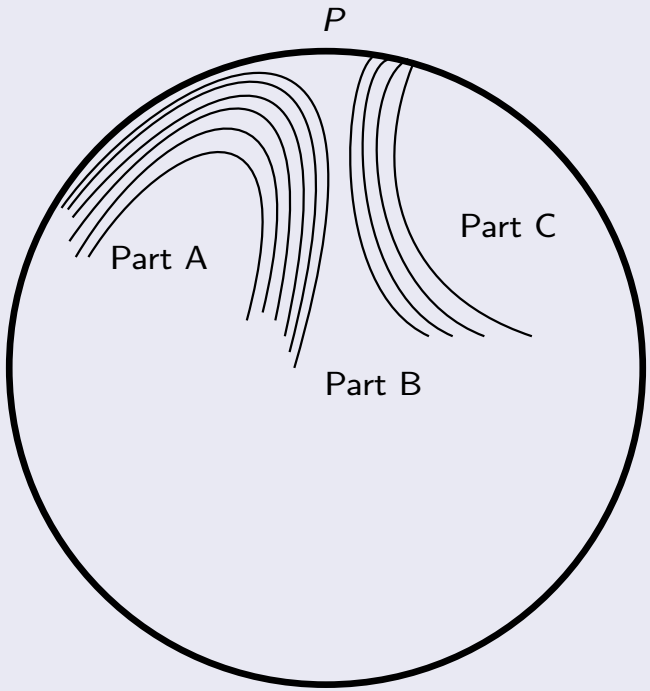
Let a minimal surface $D' \to \Sigma$ be as in the Theorem 1 and assume that it has the catenoidal end. Then all concentric circles centered at the origin of D' become lines of curvature of the surface and there is no umbilic point on the surface.

Proof of theorem 1(main idea).



After we parameterize the surface with the inverse of the Gauss map of the surface, we calculate second fundamental form along the lines of curvature.

Proof of theorem 2(main idea).



Main idea comes from the index calculation on the surface. We can deduce that there is no boundary umbilic point since a boundary umbilic point P will yield that lines of curvatures near P would be like the figure above. Since we don't have any positive index other than the puncture, we get the result.

References I

- J. Bernstein, C. Breiner : *A variational characterization of the catenoid*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **49**(1-2), 215-232 (2014).
- S. Bernstein : *Uber ein geometrisches theorem und seine anwendung auf die partiellen differentialglechungen vom auf die partiellen differentialglechungen vom elliptischen typus*, Math. Z., **26**, 551–558 (1927).
- C. C. Chen, F. Gackstatter : *Elliptic and hyperelliptic functions and complete minimal surfaces with handles*. Instituto de Matemática e Estatistica Universidade de são Paulo **27** (1981).
- J. Choe : *Sufficient conditions for constant mean curvature surfaces to be round*. Math. Ann., **323**, 143–156 (2002).

References II


P. Collin : *Topologie et courbure des surfaces minimales de* $\mathbb{R}^3$, Ann. Math. (2), **145**(1), 1-31 (1997).


A. Fraser, M. Li : *Compactness of the space of embedded minimal surfaces with free boundary in three-manifolds with nonnegative Ricci curvature and convex boundary*, J. Differential Geom., **96**(2), 183–200 (2014).


A. Fraser, R. Schoen : *Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball*, Invent. Math., **203**, 823–890 (2016).


A. Fraser, R. Schoen : *Uniqueness theorems for free boundary minimal disks in space forms*, International Mathematics Research Notices, **2015**(17), 8268–8274 (2014).


H. Hopf : *Differential geometry in the large*, Lect. Notes Math. 1000, (Springer Verlag, Berlin, 1989).

References III

- D. A. Hoffman, H. Karcher : *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*, Geometry V, Minimal surfaces, Encycl. Math. Sci. 90, (Springer, Berlin, 1997), p.5-93.
- L. P. Jorge, W. H. Meeks 3 : *The toplogy of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature*, Topology, **22**(2), 203-221 (1983).
- H. Karcher : *Construction of minimal surfaces*, Surveys in Geometry 1989/90, University of Tokyo, (1989).
- R.Langevin, H. Rosenberg : *A maximum principle at infinity for minimal surfaces and applications*, DUKE Math. **57**(3), 819-828, (1988).

References IV

- W.B.Lawson : *Complete minimal surfaces in S^3*, Ann. Math. (2), **92**(3):335-374, 1970.
- W. H. Meeks 3, *A survey on classical minimal surface theory*, Univ. Lect. Series, volume **60**, (AMS, Providence, RI, 2012).
- P. McGrath : *A characterization of the critical catenoid*, Indiana Univ. Math. J., **67**(2), 889-897 (2018).
- J. C. C. Nitsche: *Stationary partitioning of convex bodies*, Arch. Ration. Mech. Anal. **89**(1), 1-19 (1985).
- R. Osserman : *A Survey of minimal surfaces*, (Dover Publications, Mineola, New York, 2002).
- S. Park, J. Pyo : *Free boundary minimal hypersurfaces with spherical boundary*, Math. Nachr., **290**(5-6), 885-889 (2016).

References V



A. Ros, R. Souam : *On stability of capillary surfaces in a ball*, Pacific J. Math., **178**(2), 345-361 (1997).



R. Schoen : *Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces*, J. Differential Geom., **18**(4), 791-809 (1983).

Thank you.

Minimal surfaces in $\mathbb{R}^4$ like the Lagrangian catenoid

Jaehoon Lee

January 26, 2021 (The 16th Kias Winter School on Geometry)

Department of Mathematical Sciences, Seoul National University
jaehoon.lee@snu.ac.kr

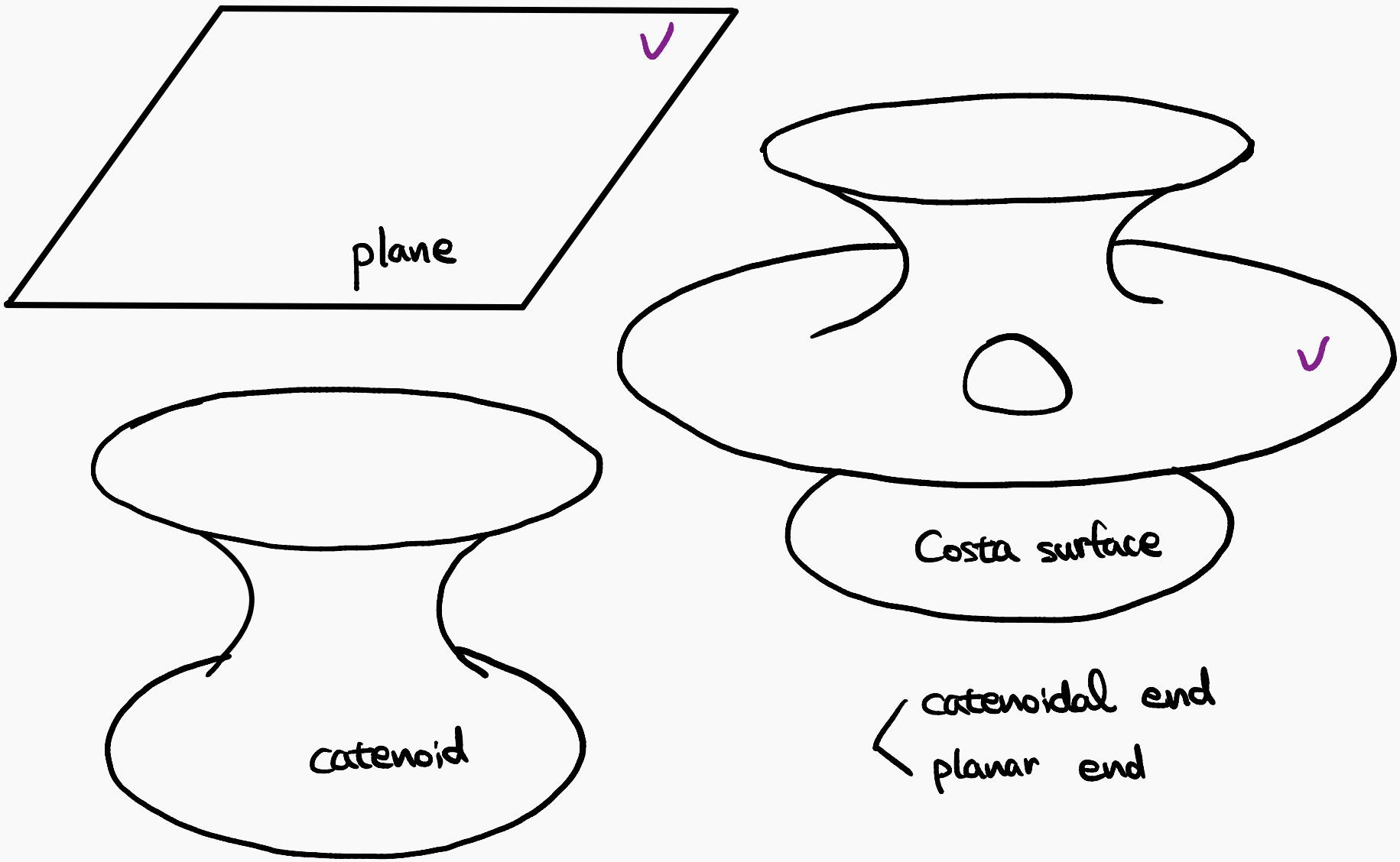
In this talk,

- Minimal surface = Complete minimal immersion of finite total curvature
- Identify $\mathbb{C}^2$ and $\mathbb{R}^4$ via

$$(z, w) \in \mathbb{C}^2 \leftrightarrow (\mathrm{Re}\ z, \mathrm{Im}\ z, \mathrm{Re}\ w, \mathrm{Im}\ w) \in \mathbb{R}^4$$

- arXiv:2101.06836

Embedded examples in $\mathbb{R}^3$



Embedded ends in $\mathbb{R}^3$

The Weierstrass representation formula:
$X : \Sigma_g \backslash \{p_1, p_2, \cdots, p_k\} \to \mathbb{R}^3$,

$$X = \mathrm{Re} \int (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$$

with the following conditions:

- Σ_g is a closed Riemann surface of genus g, and $\{p_1, p_2, \cdots, p_k\} \subset \Sigma_g$,
- ϕ_i's are meromorphic 1-forms on Σ_g with possible poles at $\{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$, and at least one of them should have a pole at each p_i,
- $\sum_{i=1}^3 \phi_i^2 \equiv 0$ and $\sum_{i=1}^3 |\phi_i|^2 > 0$,
- ϕ_i's have no real periods.

$(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \left(\frac{a}{z^2} + \frac{b}{z} + \cdots, \frac{-ia}{z^2} + \frac{c}{z} + \cdots, \frac{d}{z} + \cdots\right) dz$

$\sum \phi_i^2 \equiv 0 \Rightarrow c = -ib$

no real periods $\rightsquigarrow b = c = 0$, $d \in \mathbb{R}$

$d \log|z|$

$d = 0 \rightsquigarrow$ no logarithmic growth $\rightsquigarrow$ planar end

$d \neq 0 \rightsquigarrow$ catenoidal end

Minimal surfaces with embedded planar ends

- Provide interesting minimal surfaces
- Related to Willmore surfaces in the round sphere
  - (Bryant 84) Minimal surfaces with embedded planar ends in $\mathbb{R}^3$ compactify to give Willmore surfaces in $\mathbb{S}^3$. All Willmore spheres are given in this way.
  - (Michelat 16, Hirsch and Mäder-Baumdicker 19) Morse index of corresponding Willmore surfaces from the position of planar ends.

Existence and nonexistence in $\mathbb{R}^3$

- Nonexistence
  - genus 0 with 2, 3, 5, 7 embedded planar ends
  - genus 1 with 3 embedded planar ends
  - genus g with 2 embedded planar ends, $g \geq 0$ Schoen
- Existence
  - genus 0 with d embedded planar ends, $d \neq 2, 3, 5, 7$
  - genus 1 with $2d$ embedded planar ends, $d \geq 2$

Kusner's theorem

• e(M)=2 ⇝ n(M)=1, embedded

Theorem (Kusner 87)  ⇝ maximum principle X

Let M be a complete immersed minimal surface in $\mathbb{R}^3$ with finite total curvature and $\overline{M}$ be the one-point compactification of M via the stereographic projection $\mathbb{S}^3 \sim \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Denote by n_x the multiplicity at a point $x \in \mathbb{S}^3$, and define $n(M) = \max\{n_x | x \in \mathbb{R}^3\}$ and $e(M) = n_\infty$. Then we have $n(M) \leq e(M)$ with the equality if and only if M is a union of planes.

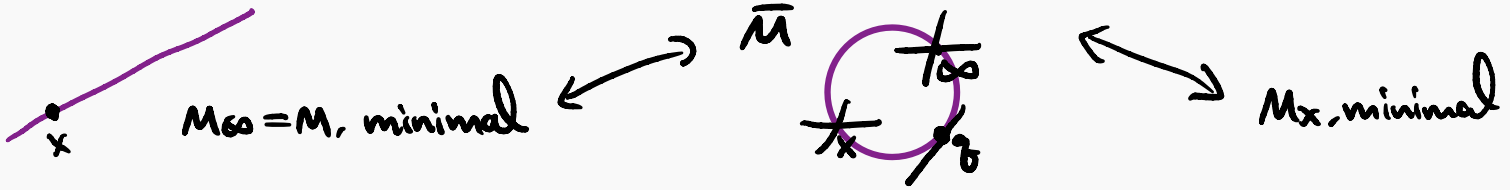
* $\mathbb{R}^4$-version (embedded planar ends)

⇒ e(M)=2 ⇝ embedded.

[Idea] the conformal invariance of $(|\vec{H}|^2 - 4K)dA$ and mean curvature spheres

$x \in \overline{M}$, $M_x \subset \mathbb{R}^3$ (stereographic projection on x), $W(\overline{M}) = \frac{1}{4}\int_{\overline{M}} |H|^2 dA = \frac{1}{4}\int_{M_x} |H|^2 dA + 4\pi n_x$

$M_\infty = M$, minimal $\quad W(\overline{M}) = 4\pi e(M) \geq 4\pi n_x$



The Lagrangian catenoid in $\mathbb{R}^4$

The Lagrangian catenoid in $\mathbb{R}^4$ can be identified with

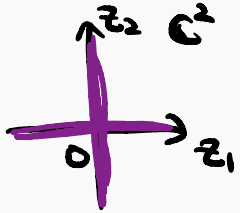
$$\left\{(z, \tfrac{1}{z}) \in \mathbb{C}^2 \mid z \in \mathbb{C} - \{0\}\right\}$$, minimal

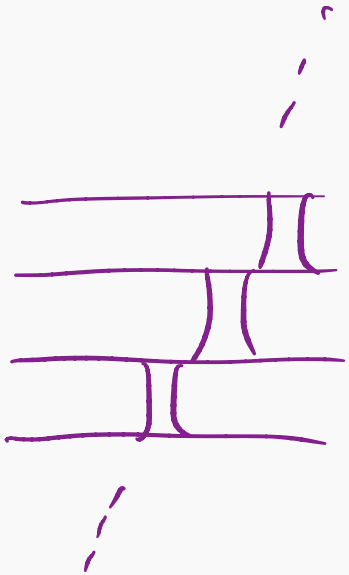
up to rigid motions and scaling. $z = re^{i\theta}$, $(re^{i\theta}, \frac{1}{r}e^{-i\theta}) = \cos\theta(r, 0, \frac{1}{r}, 0) + \sin\theta(0, r, 0, -\frac{1}{r})$

- It has total curvature -4π and foliated by circles.
- Harvey and Lawson, Castro and Urbano (Special Lagrangian)
- Hoffman and Osserman, Park (Minimal surface)

$\Rightarrow$ Asymptotic behavior , $r \to 0, \infty$

$\therefore$ Asymptotic to 2 planes





Questions

In $\mathbb{R}^4$,

Q1: Do we have minimal surfaces with 2 embedded planar ends and positive genus?

Q2: What about minimal surfaces with more than 2 embedded planar ends?

Embedded planar ends in $\mathbb{R}^4$

Let $X : \Sigma_g \backslash \{p_1, p_2, \cdots, p_k\} \to \mathbb{R}^4$ be a complete minimal immersion of finite total curvature.

We say that X has an **embedded planar end at** p_i if there exists an open neighborhood U_i of p_i such that

- the image $X(U_i \backslash \{p_i\})$ is asymptotic to a plane,
- it is a graph over the same plane outside some compact subset,
- all height functions have no logarithmic growth.



Embedded planar ends in $\mathbb{R}^4$

In terms of the Weierstrass data $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$, the minimal immersion X has embedded planar ends if and only if

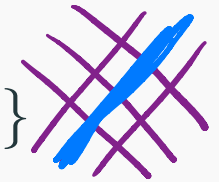
$$\begin{cases} \min\{\operatorname{ord}_{p_i}\phi_1, \operatorname{ord}_{p_i}\phi_2, \operatorname{ord}_{p_i}\phi_3, \operatorname{ord}_{p_i}\phi_4\} = -2, \\ \operatorname{res}_{p_i}\phi_1 = \operatorname{res}_{p_i}\phi_2 = \operatorname{res}_{p_i}\phi_3 = \operatorname{res}_{p_i}\phi_4 = 0 \end{cases}$$

for all $i = 1, 2, \cdots, k$.

[Example](the Lagrangian catenoid in $\mathbb{R}^4$)

$$X(z) = \left(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, \operatorname{Re} \tfrac{1}{z}, \operatorname{Im} \tfrac{1}{z}\right) \in \mathbb{R}^4, \ z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

Gauss image at $z=0,\infty$:
$[0,0,1,-i], [1,-i,0,0] \in \mathbb{P}^3$
$\Sigma \phi_i^2 \equiv 0 \rightsquigarrow$ quadric Q



rulings

embedded planar ends + on the same ruling $\rightsquigarrow$ ends like the Lagrangian catenoid.

$\Rightarrow$ The Weierstrass data can be computed as follows:

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = 2X_z dz = (dz, -idz, -\tfrac{1}{z^2}dz, \tfrac{i}{z^2}dz)$$

$X = \operatorname{Re}\int(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$

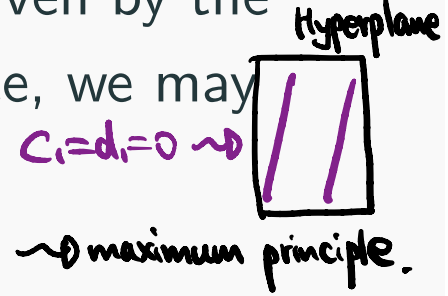
Main results 1

Theorem



There are no genus 1 complete minimal immersions of finite total curvature in $\mathbb{R}^4$ with 2 embedded planar ends.

[Sketch of the proof] Let $X : \Sigma_1 \backslash \{p_1, p_2\} \to \mathbb{R}^4$ be given by the Weierstrass data $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$. By rotating the surface, we may assume that the Gauss image at p_1 is $[1, -i, 0, 0] \in \mathbb{P}^3$.



$$\begin{cases} \phi_1 = a_0 dz + \alpha\eta_1 + a_1\eta_2 \\ \phi_2 = b_0 dz - i\alpha\eta_1 + b_1\eta_2 \\ \phi_3 = c_0 dz + c_1\eta_2 \\ \phi_4 = d_0 dz + d_1\eta_2 \end{cases}$$

(η_1: a meromorphic 1-form with a double pole only at p_1

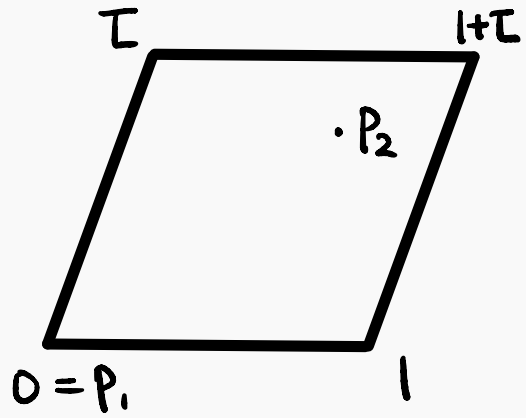
η_2: a meromorphic 1-form with a double pole only at p_2

$\alpha \neq 0$, ~~$c_1, d_1 \neq 0$~~ $c_1 \neq 0$ or $d_1 \neq 0$

$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 0$)

η_1, η_2 explicitly $\Rightarrow \Sigma\phi_i^2 \equiv 0$ & real periods.

Sketch of the proof



$\wp(z)$: Weierstrass $\wp$-function

$e_1 = \wp(\frac{1}{2}),\ e_2 = \wp(\frac{\tau}{2}),\ e_3 = \wp(\frac{1+\tau}{2})$

$(\wp')^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$

case 1) $p_2 \notin \{\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2}\}$

$$\eta_1 = \wp(z)dz,\ \eta_2 = \frac{\wp'(z)+\wp'(p_2)+\frac{\wp''(p_2)}{\wp'(p_2)}(\wp(z)-\wp(p_2))}{(\wp(z)-\wp(p_2))^2}dz$$

$\sum \phi_\lambda^2 \equiv 0 \Rightarrow$ polynomial F, $F(\wp) \equiv 0$

$\Rightarrow F \equiv 0$ & $\phi_3^2 + \phi_4^2 \equiv 0$

$\phi_3, \phi_4 (= \pm i\phi_3)$ have no real periods $\Rightarrow$ no periods

case 2) $p_2 \in \{\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2}\}$

$$\eta_1 = \wp(z)dz,\ \eta_2 = \frac{1}{\wp(z)-\wp(p_2)}dz$$

$I(z) = -z$, $I^*\eta_\lambda = -\eta_\lambda$ $(\lambda = 1, 2)$ $\therefore I^*\phi_j = -\phi_j,\ \forall j$.

$$X(z) = \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z}(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$$

$$\Rightarrow X(I(z)) = \mathrm{Re}\int_{z_0}^{I(z)}(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$$

$$= \mathrm{Re}\int_{z_0}^{I(z_0)}(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) + \mathrm{Re}\int_{I(z_0)}^{I(z)}(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$$

$$= V_0 + \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} I^*(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$$

$$= V_0 - X(z)$$

I fixes $\{0, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2}\} \Rightarrow \forall q \in \{\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2}\} \setminus \{p_2\}$,

$X(q) = \frac{1}{2}V_0 \rightsquigarrow$ $\mathbb{R}^4$-version of Kusner's thm ✳

$\int\phi_3, \int\phi_4$ meromorphic functions with only one simple pole. ✳

Main results 2

Rmk $V := \{ w \in H^0(\Sigma, K_\Sigma \otimes [2p_1 + 2p_2]) \mid \mathrm{res}_{p_1} w = \mathrm{res}_{p_2} w = 0, \ \mathrm{Re}(\mathrm{Period}_\gamma w) = 0, \ \forall \gamma \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \}$

$\Rightarrow$ V: real vector space of dim 4.

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^4 \rightsquigarrow \mathbb{R}^N$ $(N \geq 4)$ (∵ generalized Weierstrass repn)

Theorem

If $g \neq 4$, there are no genus g hyperelliptic complete minimal immersions of finite total curvature in $\mathbb{R}^4$ with 2 embedded planar ends like the Lagrangian catenoid.

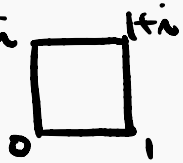
Question: Can we prove nonexistence for non-hyperelliptic cases?

Main results 3 - more than 2 ends

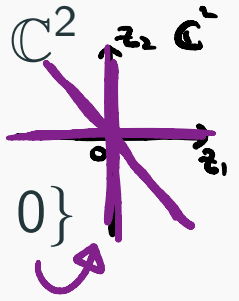
Theorem

Let $g \geq 1$ and $g+2 \leq d \leq 2g+1$. For each (g,d), there exists a complete minimal immersion of finite total curvature in $\mathbb{R}^4$ with d embedded planar ends and genus g, that is symmetric with respect to the origin and hyperelliptic if $g \geq 2$. Moreover, there are embedded examples when $g = 1$ and $d = 3$.

[Example] $P(z)$: the Weierstrass function on the square lattice



$$F(z) := \left(\frac{P'(z)}{\left(P(z)-P(\frac{1}{2})\right)\left(P(z)-P(\frac{1+i}{2})\right)}, \frac{P'(z)}{\left(P(z)-P(\frac{i}{2})\right)\left(P(z)-P(\frac{1+i}{2})\right)} \right) \in \mathbb{C}^2$$



$\Rightarrow$ Asymptotic to 3 planes: $\{z_1 = 0\}$, $\{z_2 = 0\}$, and $\{z_1 + z_2 = 0\}$

$\Rightarrow$ Symmetry group: order 4 cyclic group generated by $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Further questions

- Classify all embedded ends in $\mathbb{R}^4$ including multiplicities or logarithmic growth.
- Can we obtain a complete classification for 2-ended embedded minimal surfaces in $\mathbb{R}^4$?

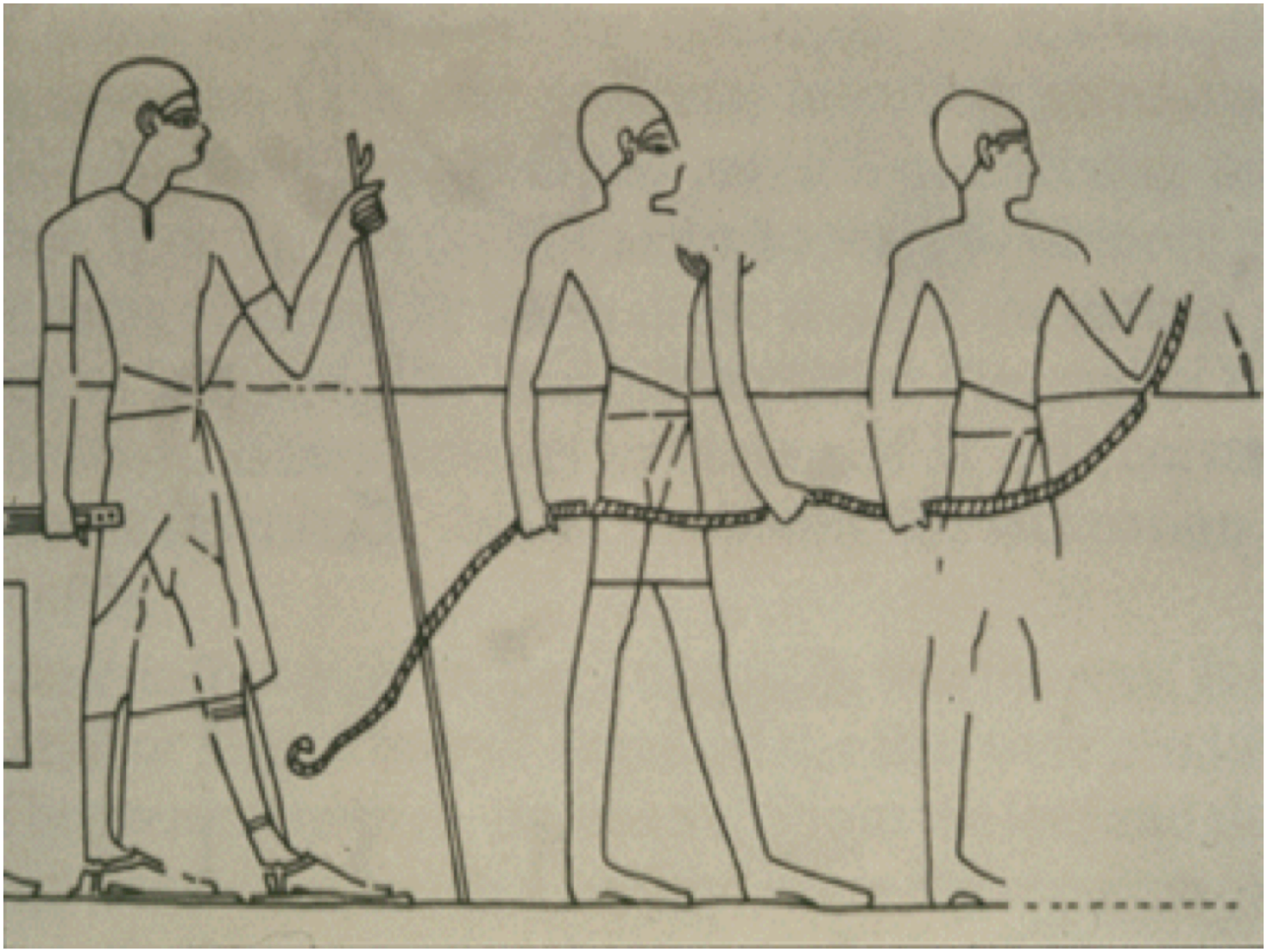
The Elements of Euclid

(Στοιχεῖα) (Εὐκλείδης)



제16회 고등과학원 기하학 겨울학교, 2021. 1. 25. 월, 김홍종

Ruler and Compasses (구규, 矩規)



Rope Stretchers





伏羲女□圖 (중국 신장, 투루판, 아스타나 고분, 7C)

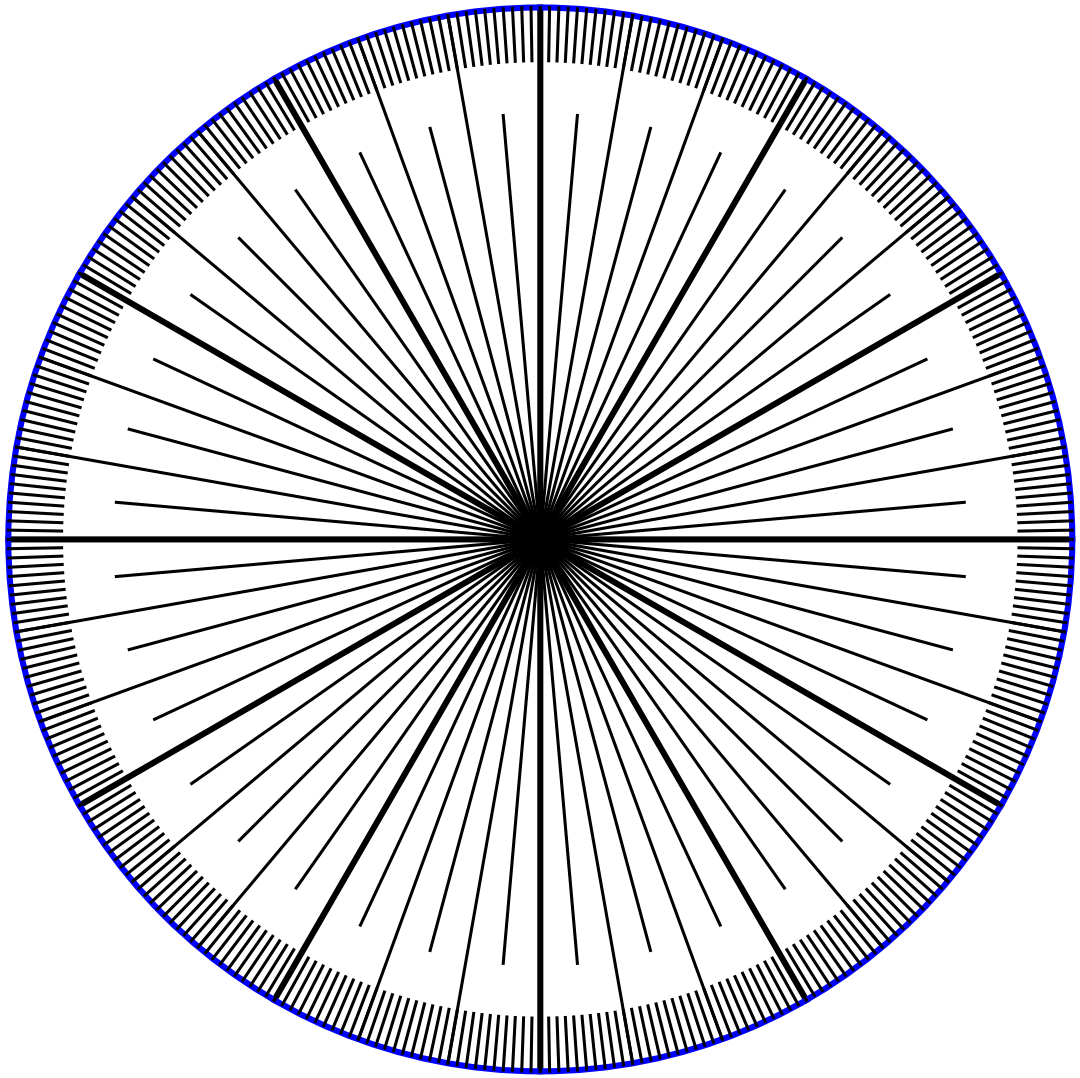


Obelisk



경기도 용인시 세중박물관

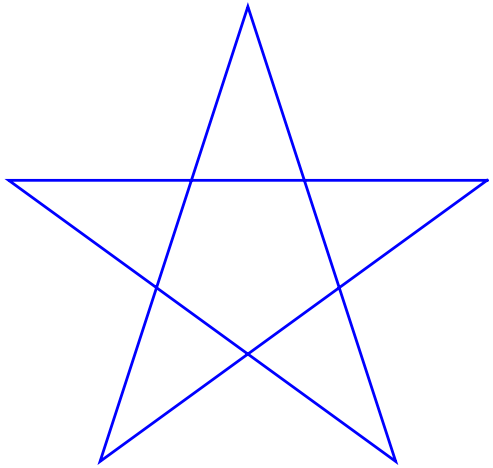
$360° = 4\angle\mathsf{R} = 2\pi = 400$ grad



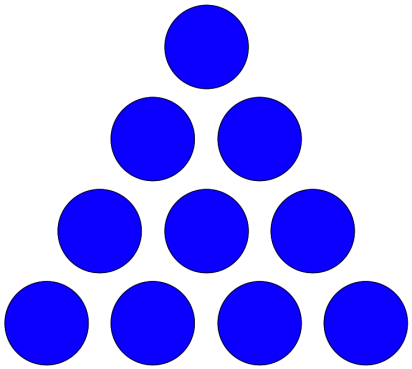
$$\angle\mathsf{R} = \sqrt{-1}$$

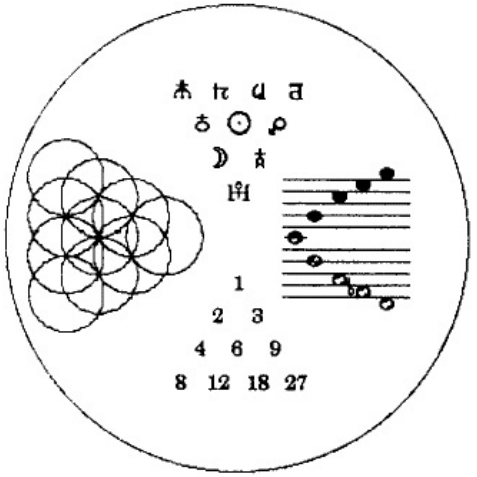
Pythagorean School





四 性 道

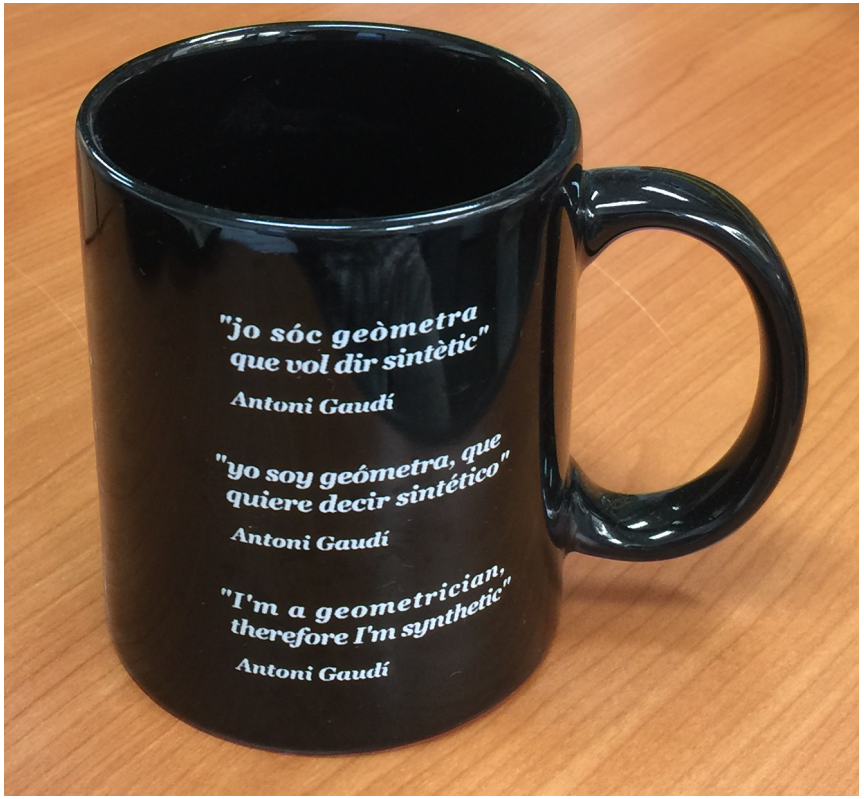




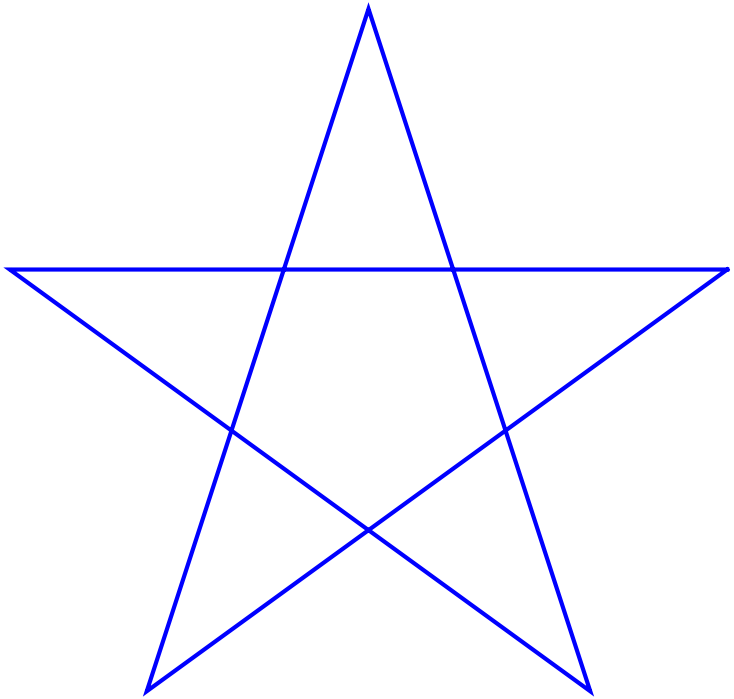
A. Gaudi (1852–1926)

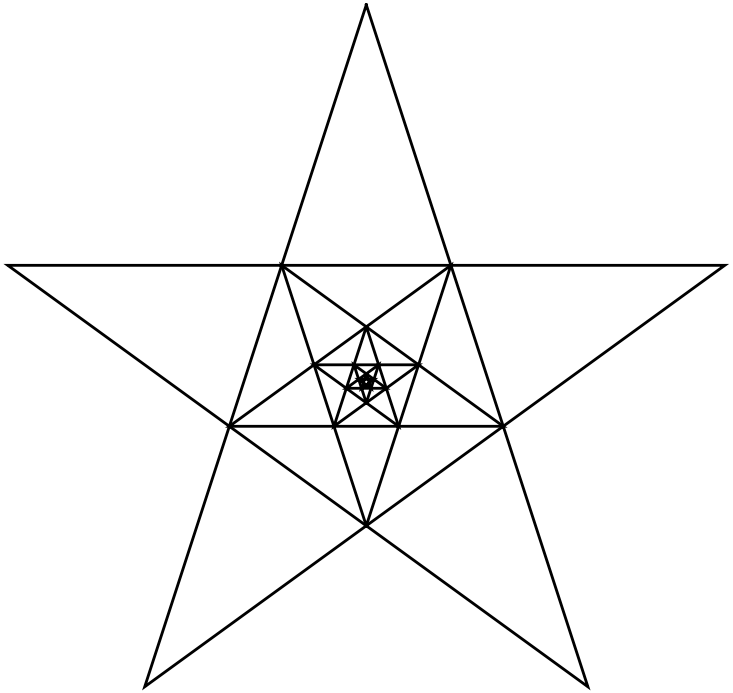


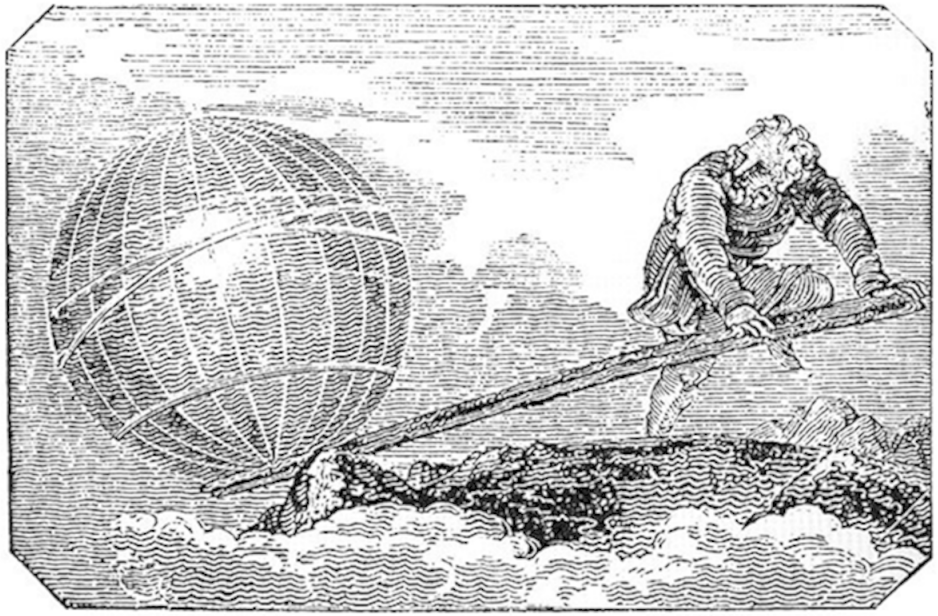



"jo sóc geòmetra
que vol dir sintètic"
Antoni Gaudí
"yo soy geómetra, que
quiere decir sintético"
Antoni Gaudí
"I'm a geometrician,
therefore I'm synthetic"
Antoni Gaudí

Commensurablity, 공측성(公測性)







$$a : b = x : y$$



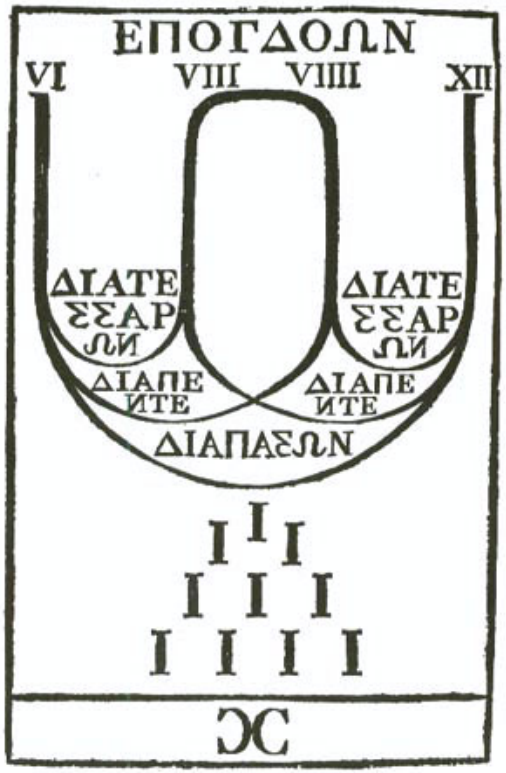


Figure 21. Diagram of tablet held up for Pythagoras. (From Bellori, *Descrizzione*. Photo: Clark Art Institute Library.)

$$6 : 8 = 9 : 12$$

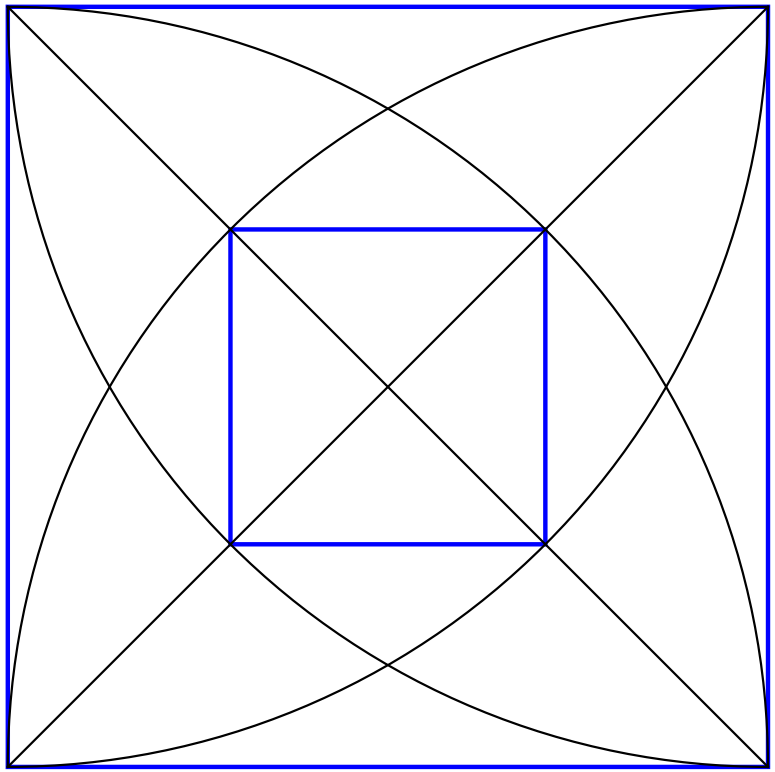


Had it been possible to calculate the year, the round of seasons, simply by multiplying the cycle of the moon, mankind would have saved a lot of trouble.

But we might have also lacked the incentive to study the heavens and to become mathematicians.

– Daniel Boorstin, *The Discoverers*, 1985.

Incommensurablity of side and diagonal (Irrationality of $\sqrt{2}$)



$$2x^2 - y^2 = -\big(2(x+y)^2 - (2x+y)^2\big)$$

x : side, y : diagonal

Plato's *The Republic*

Book VII

the knowledge at which geometry aims is

knowledge of the eternal,

and not of aught perishing and transient.



Copernicus, 1543

NICOLAI CO-
PERNICI TORINENSIS
DE REVOLVTIONIBVS ORBI-
um cœleſtium, Libri VI.

Habes in hoc opere iam recens nato, & ædito, ſtudioſe lector, Motus ſtellarum, tam fixarum, quàm erraticarum, cum ex ueteribus, tum etiam ex recentibus obſeruationibus reſtitutos: & nouis inſuper ac admirabilibus hypotheſibus ornatos. Habes etiam Tabulas expeditiſsimas, ex quibus eoſdem ad quoduis tempus quàm facilli me calculare poteris. Igitur eme, lege, fruere.

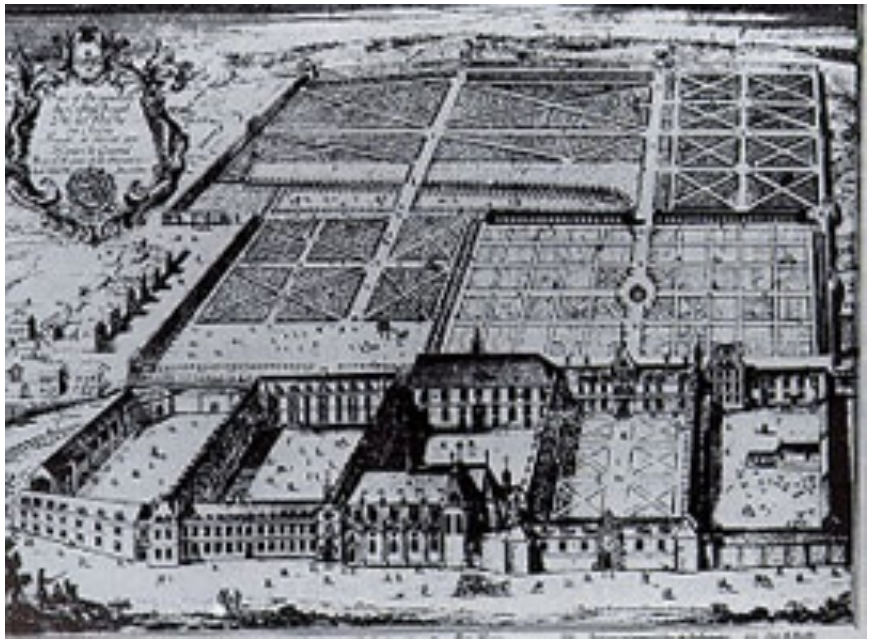
Ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω.

Norimbergæ apud Ioh. Petreium,
Anno M. D. XLIII.

Gregorian Calendar

1582. 10. 4. (목)
1582. 10. 15. (금)

Christopher Clavius (1538–1612)



Jesuit College, La Fléche

기하원본(幾何原本)



1607, Elements I - VI,
Matteo Ricci (이마두, 利瑪竇, 1552–1610)와 명나라 서광계(徐光啓, 1562–1633)가 번역

"무릇 曆法, 地理, 樂律, 算章, 技藝, 工巧(공교) 등 여러 가지 度와 數를 다루는 분야는 (아르스토첼레스의 열 개의 범주 중) 幾何府에 屬한다."

幾何란 "얼마(How much, 度數)"를 의미하였다 [정기준].

1867, Elements VII-XIII,
영국 선교사 Alexander Wylie와 중국 청나라의 이선란(李善蘭)이 번역

The Elements, Book I

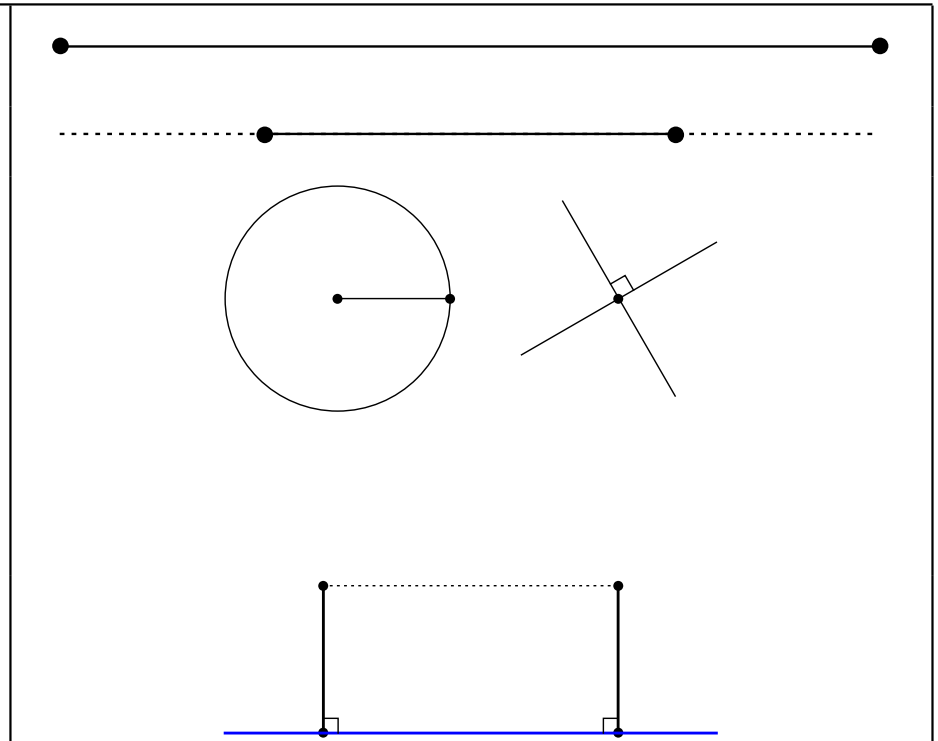
$$U = E,\ I = E \ \Rightarrow\ U = I$$

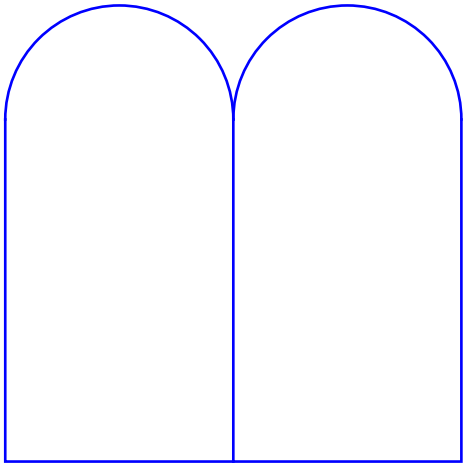
$+$

$-$

$\equiv$

The whole is greater than a part.

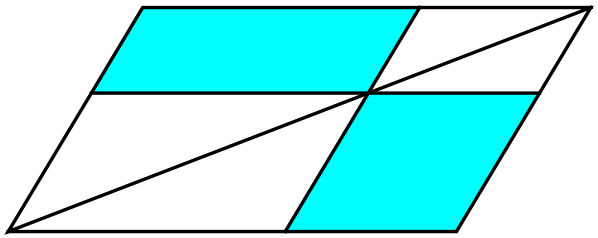




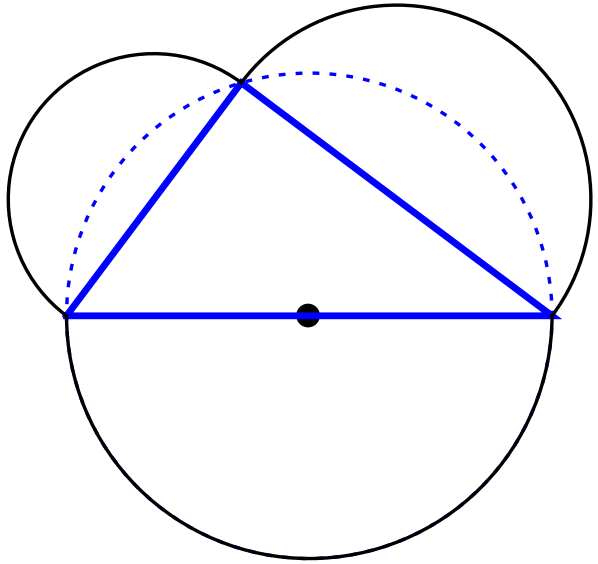


Book I

I–43



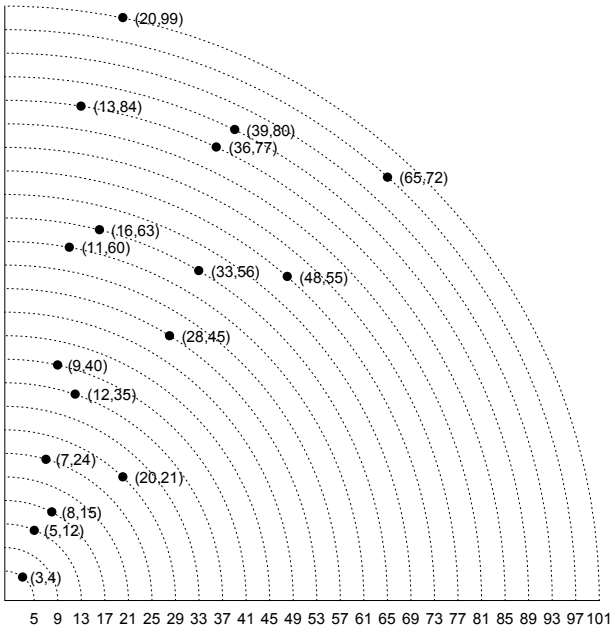
I–47

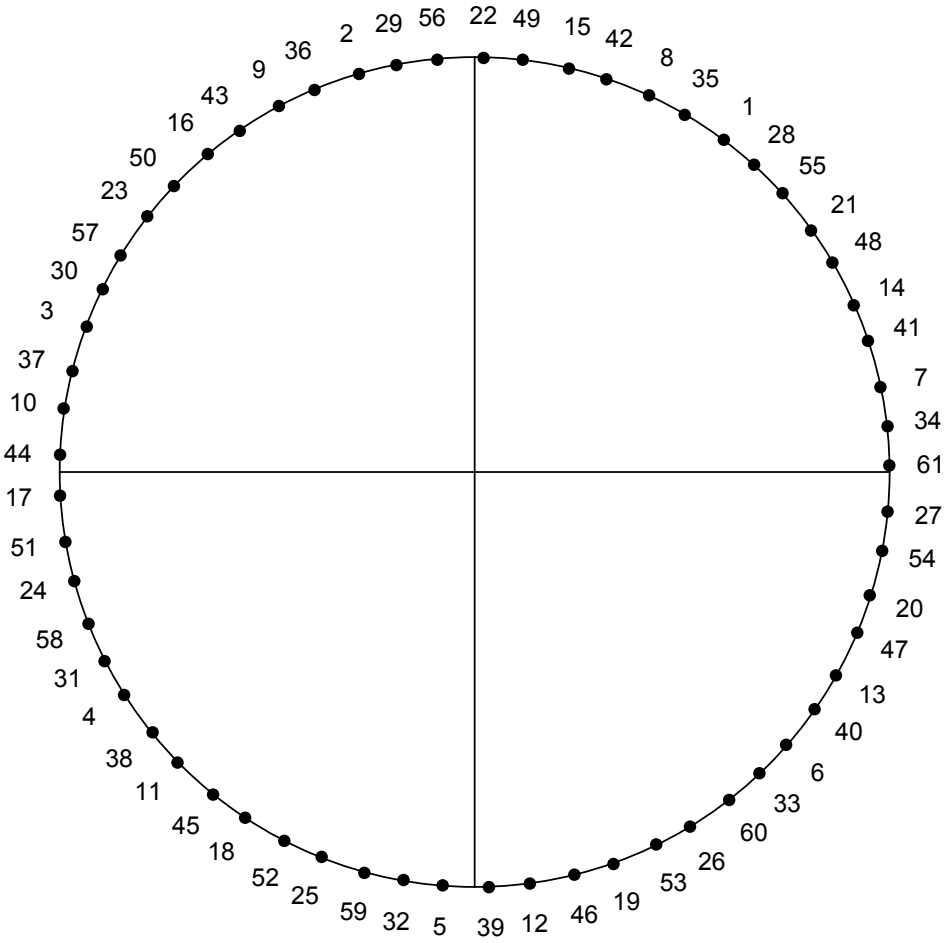


$$\begin{array}{rr} & 43 \\ \times & 47 \\ \hline & 2021 \end{array}$$

$$a \times b = (a + b - c) \times c + (a - c) \times (b - c)$$

Pythagorean Points





$$z = (3 + 4\mathbf{i})/5, \quad z^k \quad (k = 1 \ldots, 61)$$

Angles of a Pythagorean triangle are incommensurable.
Pythagorean points in $\mathbb{S}^1$ are of infinite order.

- Book II-13

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Book V (Eudoxus of Knidos)

- The ratio of two segments is called logos.
- Theory of analogia, i.e., proportion.

$$a : b = c : d$$

Whatever is capable of increase or diminution, is called magnitude, *or* quantity.

. . . money . . . weight . . .

Mathematics is the science which investigates the means of measuring quantity.

L. Euler, *Elements of Algebra*, 1770.

Book VII, VIII, IX: Theory of integers

- Book VII-1,2, X-2,3: Euclidean Algorithm

  cf. Descartes-Sturm, *Rule of Signs*

- Book IX-20. There are infinitely many primes.

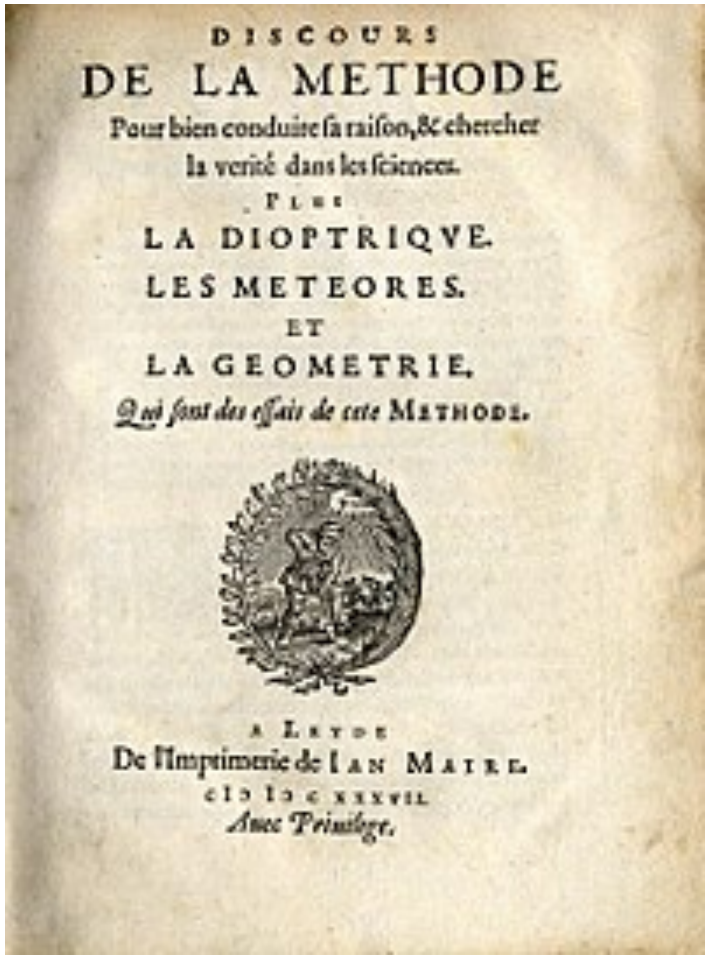
- Book XI, XII, XIII - Finite Symmetries in $\mathbb{E}^3$

  Prism (D_n), Pyramid (C_n), Platonic Solids (T, O, I)



Fröbel

1637, Descartes, *Discours de la METHODE*


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cette METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII
Avec Privilege.

$$\mathbb{A}^n, \qquad \mathbb{E}^n, \qquad \mathbb{R}^n$$

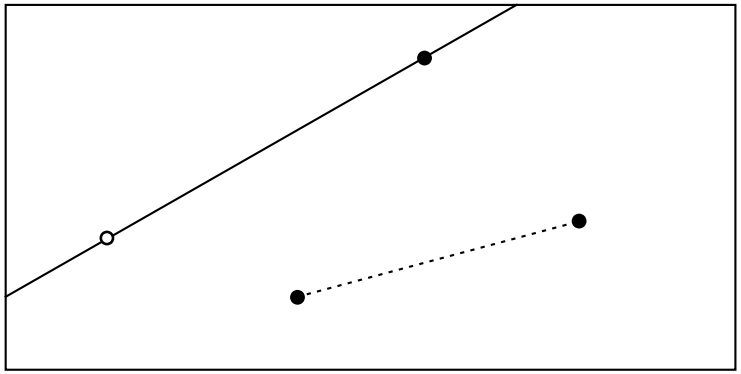
$$\vec{\mathbb{A}}^n, \qquad \vec{\mathbb{E}}^n, \qquad \vec{\mathbb{R}}^n$$

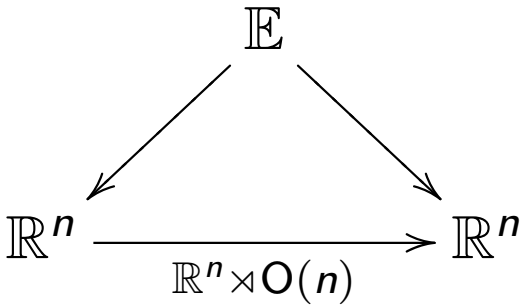
$$f : \mathbb{A} \dashrightarrow \mathbb{B}$$

$$\mathsf{D}_{\mathbf{v}} f(p) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \big(f(p + t\mathbf{v}) - f(p) \big) \in \vec{\mathbb{B}}$$

A Euclidean space is
a metric space isometric to $\mathbb{R}^n$
for some natural number n.

$$\mathbb{E}^1 \simeq \mathbb{R}$$





1997. 9. 19.

Logic is a most excellent instrument
to govern our reasoning.

– Galileo

Truly I begin to understand that although logic is a most excellent instrument to govern our reasoning, it does not compare with the sharpness of geometry in awakening the mind to discovery.

– Galileo in *Two New Sciences, 1638*

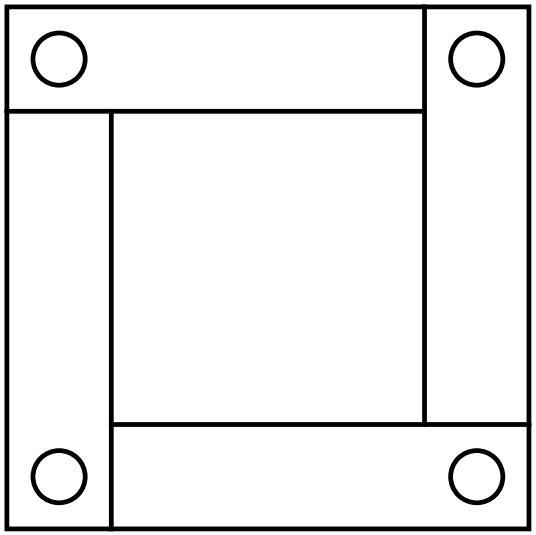
S. Drake, *Mathematics and Discovery in Galileo's Physics*, Historia Mathematica 12 (1974), 129–150.

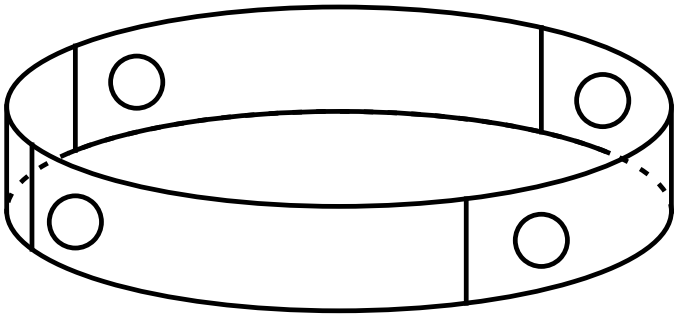
Etc

Geometry: geo:"earth", metron:"measurement"

Euclid did not once mention the ruler and compasses [Klein].

Coxeter, *Squaring the Circle*





Tom Lehrer (1928–):

- *Elements* (https://www.youtube.com/watch?v=AcS3NOQnsQM)
- *New Math* (https://www.youtube.com/watch?v=UIKGV2cTgqA)

References

김, "유클리드 기하학", Comm. Korean Math. Soc. 15 (2000), 111–121.

이무현, "기하학 원론", 교우사, 1997.

정기준, "기하(幾何)는 geometry의 역어(譯語)가 아니었다", 대한수학회소식 제129호 (2010년 1월호)

Clay Mathematics Institute Historical Archive, *The thirteen books of Euclid's Elements* (https://www.claymath.org/library/historical/euclid/)

R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, 2000.

T. Heath, *A History of Greek mathematics*, 1921, 1981.

D. Hilbert, *Foundation of Geometry*, 1899.

F. Klein, *Elementary Mathematics from an advanced standpoint: Geometry*, 1908, 1939.

S. Kobayashi, (원대연 옮김) "유클리드 기하에서 현대기하로", 청문각, 1999.

A. Ostermann, G. Wanner, *Geometry by Its History*, Springer, 2012.

Plato, *The Republic*.

우리 수학사에서 배울 점
2020년도 KIAS 기하학 겨울학교

김영욱
고려대학교 수학과

2021년 1월 26일

1 들어가기

2020년도 겨울에 열리는 KIAS 기하학 겨울학교에서 기념강연을 하게 되었다.[1] 서울대 김홍종 교수님과 함께 이번에 은퇴하는 것을 생각해서 이야기를 부탁했다고 생각된다. 김홍종 교수님 강연은 유클리드 원론을 바탕으로 하고 있고 내가 이야기한 것은 동양과 우리나라의 고전 수학을 바탕으로 이야기하고 있어서 고성은 교수님의 소개말마따나 서양과 동양 수학사를 하나씩 이야기하는 것이 되었다.

이 강연을 처음 받았을 때는 다른 강연과 마찬가지로 한 시간 동안에 할만한 이야기를 생각할 예정이었지만 청중이 수학자이다 보니까 다른 강연처럼 너무 쉬운 이야기를 하는 것은 마땅치 않아보였고 그래서 조금만 더 깊은 이야기를 할까 하니까 동양 수학의 역사를 모르는채로 한 시간 동안에 하고 싶은 이야기를 제대로 할 수 있을지 모르겠다는 생각이 들었다.

결국 강연에서 최대한 간결히 몇 가지를 이야기했지만 결과적으로 제대로 잘 생각을 전달하지 못한 것 같다. 강연 슬라이드에는 자세한 내용을 넣지 않았기 때문에 글로 적어 보낸다. 구체적으로 이 글에서 우리는 조선 중후기의 수학사에서 산학자 서너분의 예를 들어서 수학공부 이야기를 해 보려고 한다.

이 자리를 빌어서 오랜 동안 기하학 겨울학교를 열어 기하학 커뮤니티에 연구 풍토를 진작시키고 여러 수학자들이 학문적으로 친해질 수 있는 기회를 제공해 주신 최재경 교수님께 깊이 감사드리고, 운영진께는 은퇴하는 사람까지 불러준 점에 감사드린다.

2 우리 수학의 역사

근대 이전의 우리 수학의 역사에 대하여 대부분의 수학자들은 알지 못할 것이다. 그러나 간단한 강연의 도입부에 이에 대한 최소한의 지식이나마 열거하는 것도 매우 어려운 일이다. 여기서는 단순히 지난 30년 정도 한국수학사학회에서 발간된 학술지《한국수학사학회지》[2]의 논문들을 참조하도록 말씀드린다. 연전에 대한수학회소식지에 한국수학사학회 전회장님이신 서강대 홍성사 교수님께서 연재하신 우리수학사 소개글과 2014년 ICM Seoul Intelligencer와 뉴스레터에 나온

[1] 이 기념강연은 2021년 1월 17~19일과 25~26일에 인터넷 회의 형태로 열렸다.
[2] 2013년도부터는 Journal for History of Mathematics로 개명되었다.



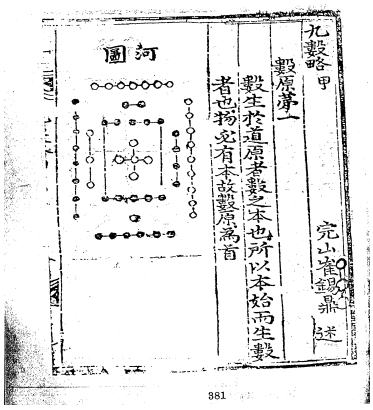


그림 1: **왼쪽**:《중국과학기술전적통휘》전5권(영인본) 가운데 제3권 전체가 수리정온이다. 그리고 이 수리정온은 또 다시 이만큼을 차지하는 수표는 뺀 것이다. **오른쪽**: 최석정의 구수략 시작 부분에 나타나는 하도(河圖).

소개글도 훌륭하므로 이를 읽어보기를 권한다. 현재 원고 마감중인 우리 수학사에 대한 책도 있다.

3 도구

첫번째로 선택한 소재는 우리 수학사에서 천재 수학자로 꼽히는 조선 말기의 지수(志叟) 이상혁(李尙爀, 1810~?)이란 분이다. 이분은 천문학쪽 과거에 붙어서 관상감 관원이 되었고 또 산학 취재에도 붙어서 산원의 자격도 가지고 있었다.[3] 당시 이조 판서로 있는 남병길이라는 천문학자가 관상감을 관장하는 제조 직책를 맡게 되었고, 그는 이상혁의 재주를 알아봐서 그를 데리고 많은 일을 같이 했다. 그들은 서양 천문학을 연구하면서 필요한 서양 수학을 알아내기 위해서 (중국을 통해서 들어온) 산서를 모두 연구했고, 천문학과 수학에 많은 책을 썼다. 남병길은 주로 천문학 책을 썼고 이상혁은 주로 수학책을 썼다. 판서인 남병길이 책의 서문에서 중인 관원 이상혁을 친구라고 부른 것은 물론이거니와 양반과 중인이 같이 연구한 사실이 드러나는 것은 아주 예외적인 경우에 해당한다.

이상혁 당시 조선 수학의 상황은 이보다 100여년 전에 쓰여진 중국의 수리정온(1723)을 통해서 17세기 중엽에 만들어진 역법인 시헌력을 이해하려는 시도가 계속되고 있었다. 18세기의 조선 수학은 이 목표를 달성하기 위해서 모든 학자들이 노력한 것처럼 보인다. 그 시작은 수리정온 또는 이와 유사한 서양 수학 내용을 거의 처음 제대로 접한 최석정과 조태구 두 영의정의 책《구수략》과《주서관견》이다. 이에 뒤이어 홍대용 등에 보면 시헌력에 들어 있는 서양 천문학을 수용하려는 노력이 많이 보이지만 이를 뒷받침할 수학에서는 아직 고전 동양수학의 수준을 벗어나지 못한다. 이는 달성서씨 집안의 삼대를 이은 학자들을 거쳐서 서서히 발전하여 19세기에 들어서면서 홍길주, 이상혁 그리고 조희순에 이르기까지 서양 삼각법을 공부하고 발전시켜나가는

[3]천문학은 3년에 한 번씩 정기적으로 치르는 과거인「식년시(式年試)」가 있었고, 산학(수학)은 비정기적으로 사람이 필요할 때 치르는「취재(取才)」를 운영했다. 이렇게 뽑힌 관원은 대부분 종9품 말단 관리로 임용되었고 일이 있을 때만 불러서 일을 시키고 근무할 때만 녹봉을 받는 체아직(遞兒職) 형태의 관직을 받았다. 그러나 중인들은 이런 관직을 가졌어도 그들이 다루는 일이 조정의 핵심 기술직이어서 따로 수입을 얻을 수 있는 경우가 많았던 듯하고 가난한 양반보다는 훨씬 부유하고 안정적인 생활을 영위했다.

것을 알 수 있다.

3.1 조선의 학문 연구 시스템

다른 모든 것을 이야기하기 전에 조선의 과학을 잠시 짚고 나가자. 천문학은 제왕의 학문이므로 중국은 물론 조선이 가장 중요하게 여겼던 과학이었지만 이를 국가 차원에서 연구시키고 발전시키지는 못했다고 보인다. 물론 관상감에서의 꾸준한 연구가 있었고 특히 1650년 경에 시헌력을 사용하기로 하면서 국가의 비용으로 관상감 관원을 북경에 파견하여 10년에 걸친 학문 수입 노력을 기울이기를 했어도 그 성과는 상대적으로 미미했다. 그 이유를 따져 보면 당시 조정과 관상감에서는 중국에서 일어나는 변화, 특히 서양의 발전해가는 과학에 대해서 너무 알지 못하고 있었고 한사람을 파견하는 것으로 이를 감당할 수 없다는 사실을 파악하지 못한 것이 원인이라고 보인다.

그러나 중국에 들어온 발전된 서양 수학을 받아들이고 이해하려는 노력은 정부와 별개로 개개의 학자들 사이에서 이뤄지고 있었다. 실제로 조선 후기의 수학자들 가운데 상당수는 높지 않은 관직을 가졌거나 또는 재야의 학자들 이었으며 대를 이어 차츰차츰 발전해 나간 사실로부터 관이 주도한 학문 연구가 아니라 정부 밖의 학자 커뮤니티의 자생적 연구에 힘입은 바가 크다는 것을 알 수 있다. 예외적으로 관상감에서 정부가 수집한 자료 또는 관상감 제조가 수입할 수 있었던 자료의 덕을 톡톡이 본 것은 이상혁이었다.

조선의 학문은 중요한 가문을 중심으로 연구되고 쌓여나가는 시스템이었다. 임금 앞에서의 논쟁은 정부 정책을 결정하는 중요하면서도 유일한 기회였고 중요 가문들은 최상층 관료에 자신의 문벌 사람을 올려 놓고 이런 논쟁을 통해서 자신의 철학이 정책에 반영되도록 했다. 이의 순기능은 각 가문이 정책의 안을 만들고 이의 장단점을 적극적으로 검토하도록 했다는 점과 이렇게 만들어진 안들이 임금 앞에서 경쟁해서 최종선택되는 매우 개방적인 정책결정 시스템이 운영될 수 있었다는 점에 있다. 그리고 이것은 이 결정을 이끌어내는 임금의 자질과 능력에 크게 의존한다는 점을 간과할 수 없다. 세종이나 영조, 정조 등의 임금이 좋은 평가를 받는 부분이라고 생각된다.

이런 논쟁은 그 내용이 예법과 철학과 같은 것일 때 정치상황과 맞물려서 당파싸움이 되고 사화로까지 이어지기도 하지만 일반적인 상황에서는 전혀 달랐다고 보인다. 예로 17세기 중반에 시헌력의 도입을 놓고 토의가 벌어졌을 때 찬성과 반대쪽은 과학과 수학을 공부하고 그 결과를 가지고 시헌력 도입 논쟁을 벌였으며, 시헌력 도입에 반대했던 전라관찰사 김시진(金始振, 1618～1667)은 이 논쟁을 위해서 당시 구하기 어려웠던 13세기 중국 산서 《산학계몽》을 다시 목판으로 간행해서 연구할 정도였다. 즉 반대를 하려고 해도 정치적 반대가 아니라 정확히 나쁜 점을 지적하는 과학적 반대가 되어야 했다. 실제로 이때 중간된 《산학계몽》은 조선 후기의 수학 발전에 결정적 역할을 했다. 임진왜란과 병자호란을 거치면서 조선에서는 산학을 아는 사람도 별로 없었고 책도 거의 남아있지 않았지만 1660년에 중간된 《산학계몽》은 그 이전 100년의 갭을 곧바로 메꿨고 17세기의 박율과 경선징을 거쳐서 18세기 초의 최석정과 조태구 그리고 홍정하, 유수석이 나올 수 있는 발판이 됐다고 생각된다.

그러나 이런 시스템은 18세기부터 들어오는 서양 과학을 감당하기에는 역부족이었다. 국가가 학문을 주도하고 전문 과학자를 양성하는 시스템이 필요한 시기였지만 조선은 이런 변화를 제대로 감지하지 못했다. 반면에 국가 차원의 지원이 없어도 조선의 학자들은 맡은 바 역할을 다 했다.

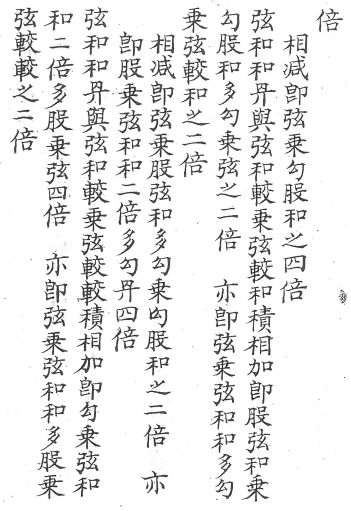

倍
相減卽弦乘勾股和之四倍
弦和和幷與弦和較乘弦較和積相加卽股弦和乘
勾股和多勾乘弦之二倍　亦卽弦乘弦和和多勾
乘弦較和之二倍
相減卽弦乘股弦和多勾乘勾股和之二倍　亦
卽股乘弦和和二倍多勾幷四倍
弦和和幷與弦和較乘弦較較積相加卽勾乘弦和
和二倍多股乘弦四倍　亦卽弦乘弦和和多股乘
弦較較之二倍

그림 2: 정약용의《구고원류》의 한 페이지. 오른쪽 셋째 줄에서 시작하는 공식은 다음과 같다:

$$(a+b+c)^2+(a+b-c)(-a+b+c)=2(b+c)(a+b)+2ac=2c(a+b+c)+2a(-a+b+c).$$

이 식은 $a^2+b^2=c^2$을 만족시키는 모든 수에 대해서 성립한다.

조선 후기의 산학자들 면면을 보면 조정의 말단 관리, 정승, 판서, 시골의 현감, 무관, 재야의 학자 등 여러 위치에서 묵묵히 수학을 연구하고 국가 프로젝트 없이도 국가에 필요한 내용들을 채워나갔다. 이들은 서로의 교류가 없어도 필요한 것들을 알아서 만들고 기록으로 남겼으며 다른 학자들의 발판을 마련했고 미비한 국가 시스템을 보완했다. 이것이 조선의 저력이었다면 저력이었을 것이다. 정약용이 18년의 유배 동안에도 여러 저술을 남겼으며 이 가운데 들어 있는 수학책《구고원류》는 전 세계에 하나 밖에 없는 1700여개의 피타고라스 수가 만족시키는 공식집이다.[4]

3.2 매각성과 적수유진

1723년에 수리정온이 나왔고 이것을 집필한 것은 매문정(梅文鼎, 1633∼1721)이라는 유명한 수학자였지만 매문정이 연구했던 많은 수학 내용을 다시 정리한 것은 그의 손자 매각성(梅穀成, 1681∼1763)이다. 그가 정리한《매씨총서집요》는 할아버지 매문정의 수학 60권과 매각성 본인이 보충하는 내용 두 권으로 이뤄져 있으며 이 두 권 가운데 하나가《적수유진》이란 책이다. 이 책은 15개 정도의 수학 문제와 풀이로 이뤄져 있는 작은 책자이지만 조선에서는 이 책이 매우 중요한 역할을 했다. 그런데 이 책에 수록된 직각삼각형 문제 하나는 우리가 보기에 좀 이상하다. 이 문제는 19세기 말에 이상혁도 그의 책《차근방몽구》에서 다뤘다. 그런데 매각성의 책의 풀이는 상당히 이상하다. 한국수학사학회 발표에서 자세히 다뤘지만 이 문제는 결과적으로 3차방정식을 만들어서 풀어야 하는 문제이다. 그런데 매각성도 (아마도) 같은 방정식을 만들었다고 보이지만 그는 이것을 4차방정식(三乘方)이라고 부르고 있으며 방정식의 계수는 4개밖에 주지 않아서 3차방정식 같기도 하다. 그리고 이것을 푸는 과정은 최고차항의 계수를 방정식에서 제외했다 넣었다 하는 애매한 계산을 하고 있다. 그는 아마도 이 최고차항의 계수를 곱하는 것이 차원을

[4]구고원류라는 책의 존재를 필자에게 처음 알려준 사람은 김홍종 교수님이다. 그러나 필자는 게을러서 이를 찾아보지 못했다. 훨씬 나중에 다른 경로로 이 내용을 접했으며 놀라운 책임을 알게 되었다. 그러나 수학사 학계 바깥에서는 어떤 일본 수학사 학자의 평가를 바탕으로 별 의미가 없는 산서로 인식되어 있다.

하나 올리는 것으로 잘못 생각했던 것이 아닌가 추측되지만 그렇더라도 방정식은 입방(立方)이라고 불러야 하는 것을 잘 모르고 있는 것이다.

매각성은 할아버지와 같이 공부하고 책을 정리했으며 이 책을 쓸 당시는 중국 수학의 일인자였을 것으로 보이는데 왜 이런 부분에서 오류를 범했는가? 특히 이상혁이 자신의 책에 똑같은 종류의 문제를 풀 때는 전혀 오류가 없는 점에 비춰보아 매우 이상한 일이다. 이에 대한 그럴듯한 설명을 알아보자.

3.3 서양의 수 개념과 중국 수학에의 영향

여기서는 16~17세기 서양의 수학을 잠시 알아본다. 수학사에서 이미 잘 알려져 있는 사실은 1800년 이전에 서양 수학은 아무리 미지수가 만들어지고 이를 활용한 방정식을 기하에 사용했다 하더라도 자연수(whole number)를 제외한 모든 수는 수라고 부르지 않고 양(magnitude)라고 불렀으며 이는 선분 또는 영역(삼각형, 사각형) 등의 기하학적인 대상(도형) 자체였고 결코 현대적 의미의 수가 아니었다는 것이다. Hartshorne 교수의 아티클[5]에 잘 설명되어 있지만 1800년 경 Legendre의 책에서 처음으로 구체적으로 『우리의 양은 선분이지만 이것을 선분의 길이라고 해석하고 이 길이 숫자를 써서 수학을 전개해도 아무 문제가 없다』는 언급이 나온다고 한다. 적어도 1700년 이전에는 아무도 이런 식으로 분수나 그 밖의 실수들을 도형이 아닌 수라고 생각하지 않았다. 이것을 느낄 수 있게 해 준 또 하나의 예를 본 것은 몇 년 전에 중국에서 열린 어떤 수학사 학회에서 이탤리 학자 Umberto Bottazzini가 강연하면서 Bernoulli가 현수선이 포물선이 아니라는 것을 이야기하면서 소수점 아래 여러 자리까지 정확하게 높이를 잰 데이터를 가지고 있으면서도 이 두 곡선이 다르다는 것은 선분과 논증기하를 사용한 증명을 통해서만 이야기할 수 있었다는 것을 설명했을 때였다. 현대적 개념을 가지고 있다면 이 두 곡선에서 같은 x에 대한 y 값이 서로 다른 수라는 것만으로 충분했을 것이지만 그때는 이런 것은 전혀 수학적 개념에 들어가지 못했음을 보여준다.[6]

이제 우리가 생각해 보려는 것은 1600년 경에 마테오 리치가 중국에 와서 자신의 스승인 Clavius가 쓴 유클리드 원론의 해설서를 서광계 등과 같이 번역할 당시의 상황이 어땠을까 하는 것이다. 중국 사람들은 2000년 전부터 수학(算)의 모든 것은 수였다. 그리스처럼 수(whole number)와 양(magnitude, 자연수 이외의 수에 해당되는 도형들) 두 가지로 나뉘어 있는 것이 아니었다. 그런데 마테오 리치 등은 당연히 양의 이론을 설명했던 것이고 이것이 당시 번역한 유클리드《원론》전반부 6권, 즉《기하원본》의 내용이었다. 이때 서양 학자들과 중국 학자들은 서로를 어떻게 이해했을지가 매우 궁금하다. 기록은 없어서 알 수 없지만 중국 학자들이 서양에서 도형으로 설명하는 수 개념을 받아들이느라고 너무 고생한 것은 아닐지?

결국 18세기 초 매문정과 18세기 중엽의 매각성에 이르기까지 그들은 서양의 매우 복잡한 방정식 이론과 이의 해를 도형이라고 주장하는 이론을 받아들이느라 동양의 효율적인 계산법을 제대로 이해하고 익힐 수 있는 시간이 없었던 것은 아닐지 한다. 실제로 수리정온을 보면 1723년에 이들이 정리한 서양 수학은 여러 공식들은 기하학적 도형을 사용해서 설명 내지는 증명을

[5] AMS Notices 47권 7호(2000년 4월)에 실린 아티클로 제목은 'Teaching Goemetry According to Euclid'이다. 다음 링크 참조: https://www.ams.org/journals/notices/200004/fea-hartshorne.pdf

[6] 이런 내용을 보완해 주는 연구가 최근에 나왔다. Clavius 당시(16~17 세기)에 쓰여진 세 개의 유클리드 해설서를 비교한 박사학위 논문으로 이 내용에서 수 개념이 어떻게 사용되고 있는가를 연구했다. 링크: https://escholarship.org/uc/item/55c5t4m7

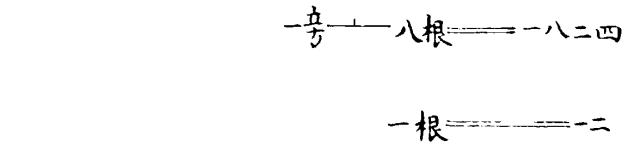


그림 3: 수리정온에 나타나는 차근방 표기. 이 식은 삼차방정식 $x^3 + 8x = 1824$와 그 근 $x = 12$를 나타낸다. 미지수는 根으로 나타내고, 그의 제곱은 平方, 세제곱은 立方을 썼다. 긴 기호들은 한자와의 혼동을 피하기 위한 것이다. 등호는 숫자 二와 혼동되고 덧셈기호와 뺄셈기호는 각각 숫자 十 및 一과 혼동된다.

하고, 이것을 써서 방정식을 유도했으며, 유도한 방정식을 표기하는 것은 서양의 표기법을 차용한 차근방(借根方) 법으로 나타냈는데, 이것에서 해를 구하는 계산은 동양 고전의 방법인 개방법, 개입방법, …, 을 사용했다. 물론 천원술은 쓰지 않았고 말로 서술했다. 즉 이들도 계산에서는 서양의 근의 공식을 사용하지 않았다.

반면에 조선의 이상혁은 상황이 달랐다. 그에게는 도형을 강요하는 서양 학자들이 없었고 그가 읽은 서양 수학 책에서 복잡한 방정식 기호(차근방)은 매우 비효율 적이라는 것을 알아보고 초기에 차근방을 도입했던 것을 버리고 후기에는 천원술을 직접 써서 표기하고 풀이는 천원술을 사용한 개방술을 썼다.

3.4 조선 수학에서

앞에서 18, 19세기 상황을 보고 생겼던 질문은 어째서 한국의 수학자들은 기하학에서 어려움을 덜 느꼈는가 하는 것이었다. 그리고 나아가서 이것이 한국 수학 발전에 도움이 되었는가를 물어보게 된다.

여기까지 했던 고찰은 몇 가지 상황을 설명해 준다.

우선 중국의 18세기(매각성 때까지)와 조선의 18세기 후반부의 수학이 전통수학에서 서양수학 도입으로 전환되면서 내용적으로는 지지부진하고 새로운 결과를 내지 못하는 것은 아마도 두 나라 모두 서양의 수학을 제대로 받아들이기 어려웠던 것과 관련있다고 보인다.

한편 지금 이야기하던 19세기 후반의 조선의 수학은 이 시기에 보면 이상혁 등의 천재적인 판단으로 서양 수학의 기호 부분을 버림으로써 완벽하게 서양의 수학이론을 동양의 계산법과 융합시켰다고 할 수 있다. 이로써 18세기 중국보다 훨씬 효율적인 계산이 가능했고 결과적으로 남병길은 세계적으로 인정받는 천문학자가 될 수 있었다. 그러나 길게 보면 이런 판단은 오판일 수도 있다. 우리 수학이 이 때 서양 수학의 기호의 의미를 조금이라도 알아볼 수 있었다면 (그리고 그 후에 일본의 방해가 없었다고 가정해서 생각하면) 우리 수학이 빠르게 발전할 수도 있었을 것이다.

이제 동양수학의 흥망도 같은 논리로 설명할 수 있다. 중국 수학이 13세기까지 서양과는 비교도 되지 않는 계산 능력과 효율성을 자랑했지만 그 이후 더 발전하지 못한 것은 바로 효율적 계산법 (즉 산가지를 사용한 당시의 컴퓨터)에 전적으로 의존했던 것이 이유로 보인다. 이런 점은 효율적인 방법에만 의존하면 이것이 항상 더이상의 발전을 가로막는다는 것을 보여준다. 그리고 이것은 현재에도 적용되는 논리이다.

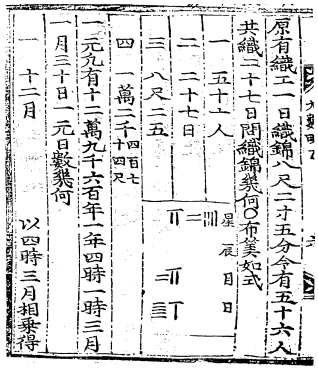


그림 4: 최석정의《구수략》에 나타나는 사상(四象) 개념. 비례 문제의 1률~4율에 일월성신(日月星辰)을 대응시켰다.

4 발견

두번째 소재는 우리 수학자 가운데 전 세계적으로 가장 잘 알려진 사람 가운데 하나인 명곡(明谷) 최석정(崔錫鼎, 1646~1715)이다. 최석정은 어려서부터 신동으로 이름났고 문중에서도 이 때문에 영의정을 지낸 자신의 큰 할아버지인 최명길(崔鳴吉, 1586~1647)의 아들인 큰아버지 집으로 입양되어 자랐다. 그도 영의정까지 올랐고 글을 잘 짓고 썼으며 수학과 천문학도 깊이 연구했는데 고위 관직에 있는 관료로써 국가를 위해서 이 부분을 연구했다고 보인다.

그의 수학관은 주자학, 양명학 등을 바탕으로 한 것으로 수학의 논리적인 이론 전개를 유학적 관점에서 설명하고 또 주자학의 여러 이론을 수학적으로 풀이하고 싶어한 것으로 파악된다. 따라서 그의 수학은 기술적인 계산법이 아니라 수의 본질을 묻는 것으로 현대로 보면 수학 기초론에 해당한 연구를 했다고 보면 좋을 것이다.

그러나 당시에 수를 설명할 수 있는 철학적 이론은 주로 주자학에 바탕을 둔 것이고 그도 이에 바탕해서 수의 의미와 쓰임을 해설하다보니 현대적 입장에서는 오히려 근거가 부족할 뿐만 아니라 그 쓰임이 점술과 연계되어 미신적인 이론으로 치부되기 쉽다.

그러나 당시의 상황에 놓고 보면 최석정은 당시의 최 첨단 철학과 최첨단 수학이 당연히 연계될 수 밖에 없을 것이라는 생각을 바탕으로 연구한 것이고 지금 보아도 어쩔 수 없는 선택이었을 것이다. 이런 결과로 그는《산법통종》에 나오는 삼률 또는 사율법을 사상(四象)에 바탕을 두어 해석하는 등 양쪽의 개념을 융합시키려고 노력하였다.

이 과정에서 나타난 것이 주자학에서도 수와 연계된 채문정, 채침 부자의 여러 도표들이다. 주자학의 도표에 대하여는 설명도 찾기 어렵고 이를 사용하는 점술가 등은 너무 미신적이 되어 쓸모가 별로 없어서 당시의 이론을 제대로 알 수 없다. 이런 도표는 팔괘나 64괘와 이를 활용하는 기본 방법론인 순열에 기초하고 있다. 괘를 변형하는 여러 가지의 조합론적 조작에는 예를 들면 착종(錯綜), 교차(交叉) 같은 용어들이 있으나 구체적인 조작의 의미는 파악하기 어렵다. 단지 이들은 괘의 효의 음양이나 위치와 순서를 바꾸는 것으로 순열, 조합론적 방법이라는 것 정도를 이야기할 수 있다.

이런 기본적 조작을 반복해서 기본 수의 배열을 바꿔 의미있는 것을 만드는 것이 최석정이 관심을 두었던 것으로 그의 책《구수략》의 마지막 부분에 그가 고안해 낸 도표를 30여개를 이미 알려져 있던 다른 30여개와 함께 수록하였다. 이것은 어떤 의미에서 완벽한 리스트를 만들어낸



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	0	9	5	6	7	8
2	3	4	0	1	8	9	5	6	7
3	4	0	1	2	7	8	9	5	6
4	0	1	2	3	6	7	8	9	5
5	9	8	7	6	3	2	1	0	4
6	5	9	8	7	2	1	0	4	3
7	6	5	9	8	1	0	4	3	2
8	7	6	5	9	0	4	3	2	1
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

$0 = (0,0)$ $5 = (1,4)$
$1 = (0,1)$ $6 = (1,3)$
$2 = (0,2)$ $7 = (1,2)$
$3 = (0,3)$ $8 = (1,1)$
$4 = (0,4)$ $9 = (1,0)$

For example,
$7 + 8 = (2,3) \equiv (0,3) = 3$

그림 5: 최석정의《구수략》에서, **왼쪽**: 9×9 크기의 Orthogonal Latin Square. **오른쪽**: 백자생성순수도(百子生成純數圖)에 포함되어 있는 곱셈표. ($\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/5$의 Cayley table과 동형이다.)

것이다.[7]

4.1 최석정의 발견

이 도표들 가운데 현대 수학자가 관심을 두는 것 두 가지를 언급한다.

첫번째 것은 이미 20세기 말에 KAIST의 한상근 교수님 팀이 발견한 것으로 이미 국제적으로 유명한 것이다. 즉 서양에서는 Euler에 의해서 발견되고 연구된 것으로 알려져 있는 Orthogonal Latin Square를 Euler보다 60년 이상 앞서서 최석정이 9×9 크기 것의 예를 수록하고 있는 것이다. 이 덕분에 최석정은 이 이론의 시작으로 거의 인정받고 있다.

또 다른 것으로 최석정의 도표 가운데 하나는 $\mathbb{Z}/10$의 곱셈표의 한 가지 형태와 동형인 도표를 수록하고 있다. 이것도 한상근 교수님에 의해 보고된 것으로 간단히 말해서 이 군이 $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/5$ 꼴로 나타내어진 것을 이 두 factor의 generator 들을 base로 사용해서 곱셈표를 만든 것이라고 한다.

즉 우리는 최석정이 틀린 목표, 즉 성리학으로 수학적 이론을 만들고 설명할 수 있다는 목표를 따라 수학을 전개했으니까 쓸모가 없다고 평가하지만, 그럼에도 그가 발견한 것에는 현대 수학의 이론에 합당하고 매우 쓸모가 많은 도표를 만들어냈다. 이것을 어떻게 봐야 하는가?

최석정의 연구의 과정은 우리가 좋고 나쁨을 논하기 어렵다. 그는 그의 시대에 주어진 이론들의 섭렵하며 가능성이 높은 목표를 향해 매진했다는 점에서 찬사를 보낼만 하다. 그러나 그의 목표가 결과적으로 틀린 방향이었음을 지금은 알고 있고, 따라서 그가 얻어낸 이 결과들은 틀린 목표에서 우연히(?) 찾은 결과들이니까 가치를 인정하기 어려운 것일까?

그렇게만 말하기는 어려운 것이 수학의 발견이다. 일반적으로 수학은 우리 주변에서 양식(패턴)을 찾아내는 것이라고도 설명한다. 이 때 발견된 양식이 제대로 된 양식이더라도 이에 부여하는 의미가 틀릴 수 있다.[8] 최석정의 경우는 바로 "잘못된 의미(false meaning)"가 부여된 제대로 된 양식에 해당한다. 그리고 수학에서 이런 경우는 매우 중요하다는 것을 수학의 역사를 통해서 알고 있다. 예를 들어 그리스 수학에서 제논의 역설이 발견된 것이 역설의 연구나 또는 무한의 연구의 결과가 아니라, 소위 지금은 별로 생각하지 않는 'monoist'라는 학파의 이론을 증명하기 위한 도구로 연구됐고 잘못된 결론을 도출하고 있다는 사실을 보아도 그렇다. 또 라이

[7] 이미 알려져 있던 것은 13세기 중국 산서《양휘산법》에 수록되어 있다.

[8] 없는 패턴을 존재하는 것이라고 오인하는 것을 'false pattern'이라고 부르고 달 표면에 옥토끼가 보인다고 생각하는 것이 좋은 예이다. 한편 패턴은 존재하는데 그 의미를 잘못 부여하는 것은 'false meaning'이라고 하며 주기적으로 오는 혜성을 보면 나쁜 일이 일어난다고 생각하는 것이 그런 예이다. 이것은 통계학에서 주의하라고 하는 두 가지 잘못이다.

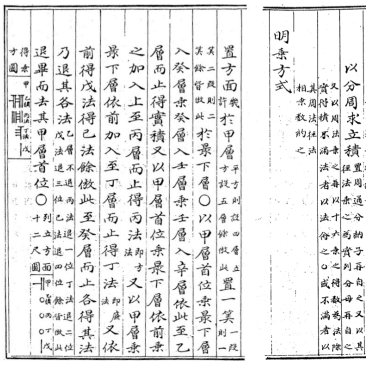


그림 6: 홍정하의《구일집》에 설명되어 있는 조립전개법.

프니츠가 17세기에 미적분을 사용한「변분학」의 기초 개념을 만든 것도 수학이 목표가 아니라 신의 존재를 증명하려는 데 있었고 성공했다고 생각했다. 이런 사실은 잘못된 목표나 잘못된 의미 부여와는 별개로 발견된 양식은 수학 발전에 큰 비중을 차지하고 자체로 중요한 의미를 가진다. 최석정의 발견도 같은 관점에서 바라봐야 할 것이다.

5 이해

세번째 소재는 18세기 우리나라의 천재 수학자인 홍정하(洪正夏, 1684~1727)가 발견한 계산법이다. 홍정하는 남양 홍씨 가운데 중인 집안에서 태어나 산원이 되어 활동하였다. 그는《구일집》이라는 책을 한 권 남겼는데 이 책은 18세기 초반까지 동양 수학을 총 망라하고 그 계산법을 완벽하게 해설한 동양에는 따로 없는 책이다.[9]

홍정하의 수학을 보면 수학을 대충 해 넘기는 부분이 없다는 것을 알 수 있다. 그는 17세기 조선 산학이 전란의 후유증으로 몸살을 앓던 것을 말끔히 치우고 동양 수학이 천원술과 개방술을 써서 완벽한 하나의 체계를 이룬다는 것을 개념적으로 또 계산적으로 보여줬다.[10] 특히 계산법에서 홍정하가 보여준 것은 천원술을 사용할 때 모든 계산을 체계적으로 할 수 있는 방법을 해설한 것과 함께 천원술의 최대 장점이면서도 대부분의 산학자가 놓치고 사용하지 못한 사실로 천원술로 표기된 다항(방정)식은 실제로 x^n으로 나눠도 모양 차이가 없어서 이런 유리(방정)식이라고 간주하고 계산할 수 있다는 것이 있다.

5.1 조립전개법

우리는 여기서 천원술로 다항식 계산을 할 때 우리에게도 복잡한 다항식 곱의 전개 방법을 홍정하가 어떻게 설명했는가를 보려고 한다. 이런 설명은 동양의 모든 다른 산서를 보아도 제대로 된 설명이 없다. 아마도 대부분의 동양 산학자들은 이 계산을 도형 등을 생각하면서 매 번 다르게 해결했다고 보인다. 그러나 홍정하는 이 곱셈이 13세기의 증승개방법의 계산 방법과 똑같다는 것을

[9] 물론 당시 중국은 서양 수학을 받아들여 연구하는 중이었지만 동양 수학은 잘 모르고 있었음을 이미 알아보았다. 한편 일본도 이미 17세기 중반에 관효화라는 천재 수학자가 나와서 동양 수학을 한 단계 끌어올려 놓았다. 일본 수학(화산)의 방향은 서양 수학 방향으로의 발전이어서 일본 수학사가들의 주장처럼 서양 수학의 영향을 받지 않았다고 하더라도 동양 수학 방향으로의 발전과는 조금 다르다.

[10] 사실 개념적으로 모든 수학 문제가 방정식 문제이고 따라서 천원술, 개방술로 해결될 수 있음을 먼저 말한 것은 17세기 중반의 수학자 박율이었다. 이 점에서 박율은 동양 수학사에서 시대를 앞서간 천재였다.

					$\alpha,\beta,\gamma,\delta$
1	0	0	0	0	
	α	$\alpha\beta$	$\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta\gamma\delta$	
1	α	$\alpha\beta$	$\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta\gamma\delta$	
	β	$(\alpha+\beta)\gamma$	$(\alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma)\delta$		
1	$\alpha+\beta$	$\alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma$	$\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma)\delta$		
	γ	$(\alpha+\beta+\gamma)\delta$			
1	$\alpha+\beta+\gamma$	$\alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma+(\alpha+\beta+\gamma)\delta$			
	δ				
1	$\alpha+\beta+\gamma+\delta$				

그림 7: 홍정하가 개발한 1차식들의 곱셈 전개 알고리즘「조립전개법」(Synthetic Expansion). 4차식 전개의 경우를 보였다. 여기서 모든 상수가 같은 때의 계산법이 증승개방법이다.

알아냈다. 사실 정확히 말하면 그는 설명이 없는 13세기 증승개방법의 계산법을 다시 알아냈을 뿐만 아니라 그 방법은 다음과 같은 다항식 곱셈의 전개법임을 동양에서 유일하게 설명해냈다:

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n).$$

우리는 여기서 자세한 설명은 하지 못하므로 해당 논문을 읽어보시기를 바란다. 단 다음 이야기는 짚어 두자. 우선 이 방법을 생각한 동양 산학자들의 방법은 도형이다. 즉 각 변의 길이(方)가 $(x+a_i)$인 n-차원 사각입체의 부피를 계산해 내는 것이다. 그리고 현대 언어로는 이 곱셈을 전개한 다항식을 계산하는 것이다. 홍정하가 제안한 방법은 다음과 같은 일반화된 조립제법(synthetic division)이다. 그리고 그 방법을 설명하다 보면 이것은 제법(long division)을 정리한 것이 아니다.[11] 우리가 연구하여 밝혀냈고 홍정하가 그의 책에 정리한 설명은 위 곱셈의 전개법이어서 이 이름은 조립전개법(synthetic expansion)이라 부르는 것이 합당하다고 하겠다.[12]

일반적인 조립전개법을 알아보는 것은 1차식 4개의 곱 $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)(x+\delta)$을 전개하는 다음 도표를 보는 것이 가장 쉽다.

5.2 홍정하 계산법의 이해

이해하는 방법에 대하여는 2014년 한국수학사학회 여름학교를 열었을 때 NIMS에서 설명하였고 이 내용은 2015년 1월 23일에 서울대학교 수학교육센터에서 열린 제6회 수학교육세미나 자료집에 다시 설명되어 실려 있다. 여기서는 간략히 다시 설명한다.

우선 13세기 중국의 증승개방법의 원리를 밝히려는 연구 과정은 조립제법의 계산 과정을 도형으로 재현하는 것이었다. 조립제법을 현대수학에서 설명하는 방법은 주어진 다항식을 $(x\pm\alpha)$로 나눈 몫과 나머지를 계산하는 long division 과정에서 나타나는 곱셈과 덜셈을 뽑아 정리한 것이다. 이것은 그림과 같은 대응을 찾는 것이다. 따라서 이 과정에는 계속해서 $(x\pm\alpha)$가 나타나게 되며 이 계산의 결과로 $(x\pm\alpha)^k$의 전개 과정이 완결된다. 그러나 long division과 조립제법의 계수의 대응관계를 정립하려면 한쪽에서 어떤 계수 α가 다른쪽의 어떤 α에 대응하는지를 밝혀야 하며 이는 각 계수의 의미를 도형에서 밝혀내야 하는 매우 복잡한 과정이다.

그러나 위에서 본 것과 같이 $\prod_i(x\pm a_i)$의 전개를 보면 나타나는 계수 a_i들이 모두 서로 달라서 도형과 곱셈 / 나눗셈, 그리고 조립제법 사이의 관계가 일목요연해진다. 같은 숫자 α

[11] 동양에는 long division 방법을 설명하고 사용할 기호가 없다.

[12] 한국수학사학회 회장님이셨던 서강대 홍성사 교수님의 작명이다.

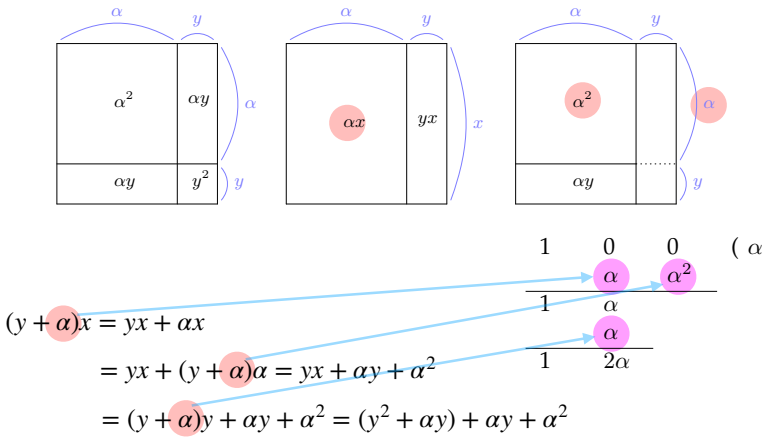


그림 8: 홍정하의 「조립전개법」(Synthetic Expansion)의 원리. 위의 도형들은 2차식의 전개 과정을 나타낸다. 왼쪽은 단 한 번의 이항전개를 사용하는 2000년 전의 개방술을 나타낸다. 오른쪽 두 도형은 단계적으로 곱셈을 풀어가는 과정을 나타내고 이를 순차적으로 쓰면 증승개방법이 된다. 이를 계산 과정과 비교하여 보면 아래와 같이 대응된다.

가 반복해서 나오지 않기 때문이다. 홍정하는 일반적인 조립전개법을 설명했다. 이것은 단순한 이항전개보다 훨씬 복잡한 것이지만 이 방법의 원리를 이해하기에는 이 복잡한 것이 훨신 쉽다. 왜 이런 모순되는 듯한 일이 일어나는가? 왜 더 복잡한 현상이 더 이해하기 쉬운가?

5.3 중학교에서 배우는 예

이를 위해서 더 쉬운 예를 하나 들자. 이 예는 단순히 이 문제를 제기할 뿐만 아니라 교육에서 어떤 것을 왜 가르치는지에 대한 문제도 같이 제기하기 때문에 중요하다.

중학교 때 즈음해서 공부하는 방정식 $x^2 = 2$와 그의 양수해 $\sqrt{2}$를 생각해 보자. 보통 선생님들이 이 방정식의 해로 $x = \sqrt{2}$는 옳은 답이고 $x = 1.4$는 틀린 답이라고 하신다. 나는 어떤 기회엔가 이 설명이 왜 맞는 것인지를 어떻게 설명해야 하는지에 대해서 고민한 적이 있다. 이 과정에서 『방정식 $x^2 = 2$의 양수해가 $\sqrt{2}$이다』라는 말이 이상한 말이라고 느끼게 되었다. 이 문장을 정의를 써서 정확히 하면 『제곱해서 2가 되는 양의 실수 x는 「제곱해서 2가 되는 양의 실수」이다』라고 쓰게 된다. 이렇게 쓰면 누구나 이런 식의 답은 답으로 인정할 수 없다는 것을 알 수 있다. 그런데 중학교 교과서는 이런 답을 쓰도록 강요하고 있다.

자 그러면 옳은 답은 무엇일까? 사실 무엇이 옳은지는 잘 모르겠지만 $\sqrt{2}$와 1.4라는 두 답을 비교해 볼 수는 있다. 옳고 그름을 잘 모르겠으면 차선의 질문은 어느쪽이 더 나은가 물어볼 수 있다. 자 이제 $\sqrt{2}$와 1.4를 비교해 보면 어떤 쪽이 더 나은가는 비교하는 기준을 세워야 이야기할 수 있다.[13] 이 기준으로 「어느쪽이 정답에 대한 정보를 더 많이 또는 더 정확히 주는가」를 생각할 수 있고 괜찮은 기준이라고 생각된다. 그런데 이 기준에 따르면 정답이라는 $\sqrt{2}$는 문제의 조건보다 더 알려주는 것이 없는 답인 반면에 오답 1.4는 적어도 이 문제의 답이 1.4와 1.5 사이에 있다는 정보를 알려주는 훌륭한 답임을 알아볼 수 있다. $\sqrt{2}$가 더 나은 답이라고 할만한 기준은 쉽게 찾을 수 없지만 반대로 1.4가 더 나은 답이 되는 기준은 좋은 것이 있다. 그러면 중학교 교과서는

[13] 동양에서는 1.4를 답으로 쓰고 있고 이것은 공식으로 「방오사칠(方五斜七」이라고 해서 한 변이 5인 정사각형은 대각선이 7이라는 뜻이다.

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

그림 9: Cardano가 발견한 3차방정식 $y^3+py+q=0$의 근의 공식.

$\sqrt{2}$가 더 낫다는 것을 어떻게 설명하려고 하는 것일까?

우리는 좋은 설명을 찾지 못했어도 $\sqrt{2}$라는 답을 만들어 사용하는 서양 수학이 훨씬 더 발전한 것을 알고 있다. 서양수학에서 $\sqrt{2}$만 잘못 만든 개념이고 나머지가 좋아서 발전한 것은 아닐 것이다. $\sqrt{2}$도 발전한 서양 수학에 기여한 바가 있을 것이고 이것은 앞에서 지적한 바와 같이 계산의 효율성과는 반대되는 역할을 하고 있음을 짐작할 수 있다. 일반적 2차방정식의 근의 공식을 봐도 그 해를 그런 식으로 근호를 써서 나타내는 것이 numerical한 답을 적어주는 것보다 매우 이해하기 힘들다는 것을 알 수 있다. 이것은 3차방정식으로 가서 카르다노의 근의 공식을 보면 더 확연하다. 제곱근과 세제곱근을 함께 써서 나타낸 3차방정식의 근의 표현을 가지고는 그 수가 도대체 어떤 수인지 전혀 알아볼 수 없다. 이런 수학이 어떤 점이 좋은 것인가?

[그림: 카르다노의 공식]

5.4 이해의 mechanism

내가 얻은 답은 간단히 말하면 이것이다. 앞에서 정말 다루기 어려운 기법인 기하학을 써서 실수 계산을 하면서 고생한 것이 모여서 결국 발전에 이르른 것처럼 방정식 풀이도 $\sqrt{2}$와 같이 정말 무엇인지 알기 어려운 것을 통해서 이해하려다 보니까 훨씬 깊은 이해에 도달하고 발전할 수 있는 기틀에 도달했다는 것이다.

우리가 대수학을 공부하면서 두 가지 상반되는 공부를 한다. 하나는 방정식을 가지고 근을 구해내는 방법을 익히는 것이고, 다른 하나는 방정식들이 언제 풀리고 언제 안 풀리는지 그 내막을 이해하는 것이다. 이 두 가지 공부는 완전히 반대되는 공부이다. 방정식을 푸는 것은 주어진 상황을 간단하게 바꿔 나가서 근이라는 목표에 도달하는 방법이다. 이런 방법은 근에 도달하는 과정을 잘 알고 있을 때 사용하는 방법이다. 즉 우리는 방정식을 어떻게 푸는지 알고 있고 이 과정을 알고리즘 또는 공식으로 바꿔서 익히게 되며 이 과정은 simplification의 연속이다. 반면에 갈루아 이론 같이 방정식이 언제 풀리는지를 이해하는 것 방정식을 간단히 해서 알게 되는 것이 아니라 반대로 간단한 방정식도 복잡하게 하고 구체적인 방정식도 추상적인 (계수가 문자인) 방정식으로 바꿔서 보아야 이해가 가능해진다.

우리가 눈앞에 놓인 사물을 알려고 하는데 우리가 이해하는 능력이 딸려서 직관적으로 이해되지 않을 때 우리는 우리가 한 번에 파악할 수 있는 만큼만 파악하고 이런 것을 여러 개 모아서 다시 파악하는 것을 반복한다. 즉 단순한 도구를 통해서 얻은 데이터(지식)을 상황을 바꾸면서 반복해서 데이터를 늘려서 이를 종합함으로써 상황의 이해에 가까워진다. 이를 비유해서 이렇게 이야기한다. 눈앞의 상황을 사진을 찍어 이해하려 하는데 사진기가 찍을 수 있는 범위가 극히 제한적이다. 그러면 우리는 여러 방향으로 사진기를 바꿔 놓으며 사진을 찍고 그렇게 찍힌 사진을 모아서 우리 앞의 상황을 판단한다. 이것이 이해를 향해 나가는 방향이고 이의 핵심은 complexification이다.

수학의 공부는 이 두 가지를 모두 해야 하는 dilemma를 가지고 있다. 한 쪽 공부만 하면, 시키는 일만 잘 하고 스스로 알아서는 하지 못하는 사람이 되거나, 반대로 생각은 많은데 아무

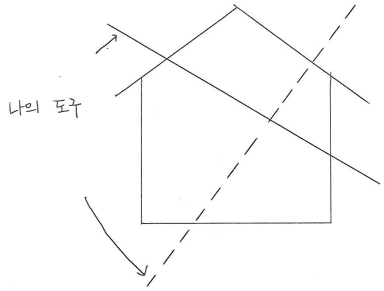


그림 10: 내가 가진 도구가 좁은 틈으로 바라보는 것이라면 이 틈을 돌려보면서 정보를 모아야 한다.

일도 제대로 해내지 못하는 사람이 된다. 즉 중국의 개방술은 그리스에 비해서 앞쪽에 너무 치우친 방법이다. 반대로 그리스의 방법은 너무 뒤쪽에 치우친 방법이라서 거의 1500년 동안 뒤져 있었다. 그리고 이 두 방법은 시간을 따라 엎치락 뒤치락 한다. 물론 방정식의 근의 공식과 갈루아 이론도 이런 관계이고 1.4와 $\sqrt{2}$도 마찬가지이다. 그리고 뒤쪽 방법이 득세할 때는 뒤쪽에서 얻은 여러 「정보들의 관계」가 제대로 파악될 때이다.

이것이 맞다면 우리는 답을 알았다. 그러니까 당장의 효율성을 높이는 simplifying 방법론과 함께, 시간이 걸려도 이해에 가깝도록 해 주는 complexifying 방법론을 동시에 개발하고 익혀야 한다는 것을 알 수 있다. 실제로 행하기는 쉽지 않다. 그러나 수학의 정상에 이른 수학자들은 이것을 하고 있는 것처럼 보인다. 그리고 중학교 학생들에게 $\sqrt{2}$는 당장 별 도움이 안될지 모르는 답이지만 이런 것과 다른 것들 사이의 관계를 익히도록 두 번째 능력을 키우는 중요한 연습이다.

5.5 인공지능을 이해하려면

최근에 딥 뉴럴 네트워크(Deep Neural Network)를 공부하는 사람들에게 중요한 문제는 이 네트워크가 무슨 일을 한 것인지를 설명하게 하려는 시도이다. 이것을 Interpretability라고 부른다. 그리고 이것은 위의 관점에서 보면 네트워크를 이해하려는 것이다. 이것은 어떤 문제인가?

인공지능이 무엇을 생각하는 것인지를 연구하는 것은 매우 어려운 문제이다. 우선 이 인공지능이 하는 생각을 알아낼 수 있다고 하더라도 사람은 이것을 이해할 능력이 없다. 아마 조금만 이해할 수 있을 것이고 그 이상은 불가능하다. 그 이유는 단순하다. 인공지능이 생각하고 있는 내용을 우리에게 전달할 수 있는 방법이 없다. 그냥 그 네트워크 속의 숫자(weights)들을 알려주면 우리는 결국 다시 통계학을 사용할 수밖에 없다. 그리고 일부의 정보만 알아낼 수 있다. 이제 인공지능이 똑똑해져서 우리 언어로 모든 상황을 설명해준다고 하자. 그런데 인공지능이 생각하는 것은 매우 복잡해서 그 상황을 분류하는 데만 10만가지로 분류하고 있다면 이 10만가지를 나타내는 10만개의 단어가 필요하다. 사람은 이렇게 많은 단어를 이해할 능력이 없다. 문제마다 10만 단어씩 만들어서 이야기한다면 우리는 이해하기를 포기해야 한다.[14] 다른 비유를 들면 베이즈 통계를 계산하면 변수의 확률분포를 답으로 얻게 되지만 통계를 아주 조금만

[14] 이것은 실수를 잘 이해하기 위해서 실수의 종류마다 그 성질을 나타내는 개념은 만드는데 그 종류가 100만가지로 나뉜다면 그 이론은 지금은 이해할 수 없은 것과 똑 같다. 실제로 실수 가운데 유리수를 제외하면 근호와 e, π, $\Gamma(x)$와 같은 몇 가지 기호를 조합하여 사용하여 극히 일부를 나타내는데 이것이 100만가지 기호로 바뀌어도 어차피 그것을 사용하여 나타낼 수 있는 실수는 measure 0에 불과할 것이다. 우리는 실수를 개별 대상으로 보고 모두 이해할 방법은 없는 것이다.

이해하는 보스에게 보고할 때는 이 분포의 기대값이나 최대사후확률점(MAP)만 보고하게 되는 것과 마찬가지다.

이제 전부 이해하는 것이 안 된다면, 조금만이라도 이해하려면 어떻게 하는가? 이 부분은 위의 방법을 활용해야 한다. 즉 인공지능이 가지고 있는 무수한 개념 가운데서 우리가 중요하다고 생각하는 개념들을 뽑고 (이것이 feature selection이다) 이 개념들 사이의 관계를 최대한 많이 알아내는 것이 우리가 아는 유일한 방법이다. 실수 가운데서 $\sqrt{2}$를 이해하기 위해서 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$의 계산법을 익히는 것과 같다. 이렇게 $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+3$ 등의 관계를 알게 되는 것이 그 첫 걸음인 것이다. 방정식에서는 체의 확대와 그의 갈루아 군과 그 역할 관계가 feature라면 선형변환에서는 eigen value나 singular value와 그들의 역할이 대표적인 feature이다.

6 나오기

수학의 역사를 공부해 보면서 예상 밖의 사실을 알게 된다. 중국의 산서들은《구장산술》의 틀을 벗어나지 못하는데 이는 경전으로 인정된 내용은 바꿀 수 없고 그대로 답습해야 한다는 중국의 전통을 못 벗어나는 것이다. 나는 조선도 유교와 사대사상을 바탕으로 중국 경전에 예속돼 있었다고 생각해 왔지만 조선의 수학책을 보면서 조선의 학자들은 모두 자유분방한 수학 공부를 했다고 느끼게 되었다. 공부한 목표도 자신이 중요하다고 생각하는 것이고 남의 생각에 휘둘리지 않았으며, 이를 기술하는 방법도 자신의 눈이 알아보는 그대로의 방법을 사용했다. 이런 점은 조선 사회가 유교에 얽매인 사회라는 선입견과는 매우 다른 면모이다. 이런 면은 우리가 읽은 역사책과 우리가 본 사극이 제대로 못 보여주는 것 같이 느껴진다.

그래서 조선은 창의적 사고로 가득찬 놀라운 나라였고 이는 임금부터 시골이나 재야의 학자까지 망라해서 모두 그러했다. 당연히 그들은 그들이 처한 상황에서 최선을 다 했으며 그 결과가 항상 좋은 것은 아니었지만 그 결과를 기록하여 남기는 데는 게으르지 않았다. 자신의 새로운 생각을 기록하고, 가르치고 배우기 좋게 정리하고, 남의 책에서 중요한 것을 뽑고 모아서 정리하는 등 여러 가지 기록을 만든 것을 볼 수 있다. 이것은 우리 선조가 잘했던 것이고, 지금 가장 필요한데도 우리는 잃어버리고 하지 못하는 것이다. 그리고 이런 유산은 우리가 꼭 이어나가야 할 능력이다.[15]

[15]필자도 기록을 남기는 것에 대해서 자주 생각하고 노력해 보지만 정말 쉽지 않다. 기록하는 방법은 김홍종 교수에게 부탁해서 강의를 들어보고 싶은 것 중 하나이다.