산란

최강신*

2023 KIAS-SNU 겨울 캠프 강의록

1 개요

양자역학에서 입자들의 산란(scattering)을 공부해보면 양자역학이 어떻게 작동하는지를 알 수 있다.

나아가, 산란을 기술하는 소위 S 행렬을 분석함으로써 양자역학을 자유롭게 확장시킬 수 있다. 음의 에너지, 복소수 에너지, 복소수 운동량, 복소수 각운동량을 가지고, 속박 상태(bound state), 공명 상태(resonant state), 레제 이론(Regge theory)등을 알 수 있는데 이들은 해밀토니안만으로는 이해하기 힘들다.

로런츠 공변성(Lorentz covariance)을 추가하면 양자역학은 양자 마당 이론(quantum field theory)이 된다. 이는 필연적으로 다체계 이론이며, 국소 상호 작용을 하고 반입자를 도입하고, 입자의 스핀과 통계를 연관시킨다. 이처럼 양자 마당 이론이 어떤 형태가 되어야 하는지도 산란을 통해 이해할 수 있다.

새로운 입자와 상호작용을 도입해서 자연을 설명하는 것이 입자물리학인데, 이를 확인하는 유일한 수단은 산란 실험이다. 거대한 입자 가속기를 통하여 기본입자의 존재와 상호작용을 밝히고 있다. 어떤 강입자(hadron)들 무리의 스핀과 질량은 특정한 비례관계를 갖다. 이를 설명하려는 노력을 통해, 강입자 대신 기본입자를 똑같이 설명할 수 있을까를 생각하다가 질량이 없는 스핀 2 입자의 이론 (중력이론!)을 주는 끈이론을 발견했다. 입자를 넘어서는 새로운 대상도 해밀토니안은 기술하지 못하지만 산란이론에서 중요한 성질을 알아낼 수 있다.

여기에 있는 모든 내용은, 아름답고 감동적인 책인 John R. Taylor의 Scattering Theory에 명쾌하게 설명되어 있으나, 그럼에도 불구하고 설명을 더 단순하게 하려고

*전자우편:kangsin@ewha.ac.kr

노력했다. 양자역학에서 양자 마당 이론으로 확장하는 과정은 Anthony Duncan의 The Conceptual Framework of Quantum Field Theory에 나와 있다.

2 들어가고 나가는 상태

산란은 다음 단계로 이루어진다.

1. 우리가 상태를 아는 입자들이 서로 다가가서
2. 서로 상호작용하거나, 퍼텐셜이 기술하는 영향을 받아서 상태를 바꾸고
3. 영향을 벗어나서 검출 가능한 상태가 된다.

이론이 하는 것은 이들 특히 두번째 단계를 기술하여, 어떤 일이 일어날지를 예상하는 것이다. 이에 따라 필요한 입자들을 실험 장치에 집어놓고, 상호작용을 마치고 나오는 입자들을 검출할 수 있는 알맞는 검출기를 가져다 놓아야 한다. 이의 반대, 즉 아무런 일이나 일어나게 하고 무언가를 발견하는 것은, 특히 미시세계에서는 불가능하다.

먼저 입자 하나가 (아마도 고정 타겟이 있어서) 퍼텐셜의 영향을 받아 산란되는 것을 기술해보자.

고전적으로는 실험 장치에 진입한 입자가 전하를 띤 과녁(target)에서 힘을 받아 가속을 받고, 다시 나가는 그림을 생각할 수 있다. 모든 과정을 자취 곡선으로 그릴 수 있을 것이다. 퍼텐셜의 영향을 거의 안 받는 아주 먼 곳에서는 거의 등속 운동을 할 것이다. 이후 상호작용을 하면서, 궤도가 휜다. 상호작용이 크면 많이 휘고 한바퀴 돌아 나갈 수도 있다. 상호작용이 너무 크면 입자가 퍼텐셜에 갇힐 수 있다. 이를 속박 상태(bound state)라고 한다.

마찬가지 그림을 양자역학에서도 떠올려 볼 수 있다. 그러나 고전적인 자취는 생각할 수 없다. '입자'라고 불렀던 것은 파동함수로 기술되며 전 과정에서 슈뢰딩거 방정식을 만족한다.

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle. \tag{1}$$

특히, 과녁의 영향은 퍼텐셜 V로 기술된다.

$$H = H^0 + V = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V, \tag{2}$$

이고 $\hat{\mathbf{p}}$는 운동량 연산자이다. 양자역학도 측정(measurement)이 일어날 때를 제외하고는 완전히 결정론적이다. 파동함수의 변화는 유니터리(unitary) 변환에 따라 이루어지며 전체 확률은 유지된다.

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi\rangle, \quad U(t) = e^{-iHt}. \tag{3}$$

인수가 없는 상태함수 $|\psi\rangle$는 $t = 0$에서 '초기조건' 이라고 생각할 수 있고, 이 때는 한창 상호작용이 일어나는 시간 근처이다. 이보다 충분히 먼 시간 전에 들어오고, 충분히 먼 시간 후에 나가는 것을 생각할 것이다.

들어오는 입자는 충분히 큰 시간 전 $t \to -T < 0$에서부터 들어온다고 생각한다. 이를 그냥 $t \to -\infty$라고 해도 된다. 실제 세상에서 입자들이 충돌기를 지나는 수 마이크로초도 미시 세계에서는 무한이라고 볼 수 있다. 퍼텐셜이 거리에 따라 충분히 빨리 약해지면, 들어오고 나가는 상태는 퍼텐셜의 영향을 거의 안 받으므로 자유 상태와 비슷하다.

$$t \to -\infty : U(t)|\psi\rangle \to \text{ 거의 자유 상태} \tag{4}$$

이를 산란 상태(scattering state)라고 하자. 산란 상태가 완전한 자유 상태로 가는 것은 아니다.

퍼텐셜의 영향 없이 연산자 $U^0(t) = e^{-iH^0t}$에 따라 시간 진행하는 자유 상태를 생각하는 것이 편하다. 섭동으로 문제를 풀 때 평면파를 기저로 파동함수를 전개할 수 있으며, 나중에 로런츠 공변성을 도입할 때 자유 입자의 표현(representation)을 다루는 것이 사실상 유일한 방법이다. (3)와 비슷한 모양으로 시간 진행한 자유 상태 $U^0(t)|\psi\rangle_{\text{in}}$를 생각하고, 산란 상태와 차이가 충분히 작아지는 함수의 극한을 생각한다.

$$\lim_{t\to-\infty} \left\| U(t)|\psi\rangle - U^0(t)|\psi\rangle_{\text{in}} \right\| = 0. \tag{5}$$

이런 뜻으로 산란 상태의 극한과 바꿔쓰는 자유상태를 들어가는(in) 상태라고 부르겠다.[1] 이를 다음과 같이 나타내자.

$$|\psi\rangle \equiv \Omega_+|\psi\rangle_{\text{in}} \equiv \lim_{t\to-\infty} U(t)^\dagger U^0(t)|\psi\rangle_{\text{in}}. \tag{6}$$

Ω_+는 묄러(Møller) 연산자라고 한다. 시간이 많이 흘러 미래에 나가는(out) 상태에 대해서도

$$|\psi\rangle \equiv \Omega_-|\psi\rangle_{\text{out}} \equiv \lim_{t\to\infty} U(t)^\dagger U^0(t)|\psi\rangle_{\text{out}} \tag{7}$$

[1] 어떤 책에서는, 대응되는 자유상태가 아니라 산란 상태의 $t \to -\infty$ 극한을 들어가는 상태라고 부르기도 한다.

를 정의할 수 있다.

몇가지 주의해야 할 점이 있다.

1) 퍼텐셜이 구대을 가지고 있고 $V = V(r), r \equiv |\mathbf{x}|$, $r \to \infty$로 갈 때 $r^{-3+\epsilon}$보다 더 작다면 (5)처럼 수렴하는 것을 보일 수 있다: 파동함수가 $r = 0$에서 잘 정의되려면 $r \to 0$으로 갈 때 $r^{-2+\epsilon}$보다 작아야 한다. 유카와 퍼텐셜

$$V(r) = k\frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{8}$$

는 이들을 모두 만족하지만 $\mu = 0$인 쿨롱 퍼텐셜은 이를 만족하지 못한다. 자연에는 사실상 고전 쿨롱 퍼텐셜이 없는데, 양자역학적인 효과 때문에 과녁에서 멀리 떨어질수록 가림(screening)이 일어나[2] 전하가 약해지고 힘이 더 빨리 감쇠하기 때문이다. 또, V는 유한한 불연속이 가능하지만 연속이어야 한다. 가령, $0 < r < r_0$ 사이에서는 $V = V_0$으로 상수이고 바깥쪽에서 0인 퍼텐셜은 이 조건을 만족한다.

2) 해밀토니안 연산자가 만족하는 것은

$$e^{iH\tau}\Omega_\pm = e^{iH\tau}\lim_{t\to-\infty}[e^{iHt-iH^0t}] = [\lim_{\tau+t\to-\infty} e^{iH(\tau+t)-iH^0(\tau+t)}]e^{iH^0t} = \Omega_\pm e^{iH^0t} \tag{9}$$

이므로 이를 통하여 연결된 두 상태는 **에너지 고윳값이 같아**야 한다.

대표적으로, 운동량의 고유상태인 평면파 $|\mathbf{p}\rangle$를 생각하면

$$\langle\mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-E_pt)}, \quad H^0|\mathbf{p}\rangle = E_p|\mathbf{p}\rangle, \quad E_p = \frac{p^2}{2m} \tag{10}$$

이다. 여기에 묄러 연산자를 가한 산란 상태

$$|\mathbf{p}\pm\rangle \equiv \Omega_\pm|\mathbf{p}\rangle \tag{11}$$

는 상호작용 해밀토니안에 H에 대하여 같은 고윳값을 가져야 한다. 왜냐하면 (9)는 $H\Omega_\pm = \Omega_\pm H^0$을 뜻하고,

$$H|\mathbf{p}\pm\rangle = H\Omega_\pm|\mathbf{p}\rangle = \Omega_\pm H^0|\mathbf{p}\rangle = E_p\Omega_\pm|\mathbf{p}\rangle = E_p|\mathbf{p}\pm\rangle \tag{12}$$

가 되기 때문이다. 이 두 상태의 시간에 대한 변화가 같다는 점은 나중에 크게 편리하게 사용된다. 들어가고 나가는 점근상태의 평면파에 U^0을 붙여 (6)와 같이 들어가는 상태를 정의한 이유다.

[2] 전기력선이 진행하는 동안 입자 반입자들이 생기고 이들이 만드는 쌍극자가 전하쪽으로 돌아가면서 유효 전하가 작아진다.

상대론을 나중에 고려하면 상호작용이 질량을 바꾸므로 가능한 이야기가 되는데, 여기에서는 자유상태의 질량을 잘 조절하여 상호작용이 있는 해밀토니안과 에너지가 같아진다다고 하자.

3) 사실, 운동량의 고유상태 (10)는 L^2 크기가 유한하지 않고 규격화(normalize) 가능하지 않아서

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x|\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle|^2 = \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \to \infty \tag{13}$$

힐버트 공간의 상태가 아니지만 디랙이 자유로운 마음으로 집어넣어서 확장했다. 평면파는 무한히 뻗어있고 상호작용을 안하는 상태이므로 물리적인 상태가 아니다. 우리는 파동 꾸러미

$$|\phi\rangle_{\rm in} = \int d^3p\phi(\mathbf{p})|\mathbf{p}\rangle \tag{14}$$

를 이용하여 시간, 공간적으로 국소화된 상태를 생각할 것이다. 시간이 지나면

$$e^{-iHt}|\phi\rangle_{\rm in} = \int d^3p\phi(\mathbf{p})e^{-iE_pt}|\mathbf{p}\rangle. \tag{15}$$

가 되어 가만히 있지 않고 움직일 것이다. 가령 가우스 함수 $\exp[(\mathbf{x}-\mathbf{a})^2/(2\xi^2)]$는 운동량 공간에서도 가우스 함수이고, 아무 영향을 받지 않아도 시간이 지나면 공간적으로 퍼진다. 이를 통해

$$|\phi\rangle = \int d^3p\phi(\mathbf{p})|\mathbf{p}+\rangle \tag{16}$$

를 만들면 된다.

4) $\Omega_\pm$은 자유 상태를 산란 상태(scattering state)로 바꾸어주는 연산자로 일대일 대응(1 to 1 correspondence)관계에 있어 역 연산자가 존재한다. 또, $\Omega_\pm^\dagger\Omega_\pm = 1$이므로, 변환된 파동함수 (16)는 원래 파동함수와 같은 규격화를 가진다.

그러나, 산란 상태들은 힐버트 공간의 부분집합 $\mathcal{R} \subset \mathcal{H}$만을 차지한다. 따라서 $\Omega_\pm\Omega_\pm^\dagger \neq 1$이고, 모든 자유 상태를 전개하는 기저가 될 수 없으며, 유니터리 연산자가 아니다. (덧셈, 곱셈에 대한 실수 체와 열린 구간 체 $(0,\infty)$는 모든 연산이 동형인(isomorphic)관계와 비슷하다. 따라서 $\Omega_\pm$을 동형 연산자라고 한다) 나머지는 무엇일까? 상태의 에너지가 공간의 무한대 지점 $r\to\infty$에서 퍼텐셜의 무한대 값 $V(r\to\infty$ (보통 0으로 기준점을 잡는다)보다 작은 상태를 이들을 속박 상태(bound state)라고 하고 이의 힐버트 공간을 $\mathcal{B}$라고 쓸 수 있다. 퍼텐셜이 아무리 약해도 속박되는 상태가 있다. 이 둘의 합집합이 힐버트 공간을 채운다.

$$\mathcal{H} = \mathcal{R}\oplus\mathcal{B}. \tag{17}$$

3 S 행렬

산란(scattering, sanran) 연산자 또는 S 연산자를

$$|\psi\rangle_{\text{out}} = \Omega_-^\dagger |\psi\rangle = \Omega_-^\dagger \Omega_+ |\psi\rangle_{\text{in}} \equiv S|\psi\rangle_{\text{in}} \tag{18}$$

라고 정의하자. 들어가는 상태를 나가는 상태로 변환해주는 연산자이다. 두 상태가 우리가 관찰할 수 있는 유일한 상태이다.들어가는 상태와 나가는 상태를 앞장에서 본 것처럼 운동량으로 전개할 수 있다. 이는 선형 결합이므로 기저의 관계를 생각하면 행렬

$$\langle \mathbf{p}' - |\mathbf{p}+\rangle = \langle \mathbf{p}'|S|\mathbf{p}\rangle \equiv S_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} \tag{19}$$

을 기저로 상호작용을 전개할 수 있다. 이를 산란 행렬 또는 S 행렬이라고 한다. 이 행렬은 산란에 대한 모든 것을 담고 있다. 우리는 이론을 이용하여 이를 계산할 것이다.

산란 연산자는 유니터리(unitary) 연산자이다. 이는 자명하지 않다. $\Omega_\pm$이 유니터리 연산자가 아니라 동형 연산자이기 때문이다. 그래도 두 개를 곱하면 $\mathcal{H} \to \mathcal{R} \to \mathcal{H}$로 가는 유니터리 연산자가 된다. 따라서 들어가는 상태와 나가는 상태는 두 개가 아닌 같은 힐버트 공간의 벡터이다.

다음, 뫌러 연산자와 해밀토니안의 관계식 (9)를 전개하여

$$\Omega_\pm^\dagger H \Omega_\pm = H^0. \tag{20}$$

을 이용하면

$$[H^0, S] = 0 \tag{21}$$

을 보일 수 있다. 즉, S 연산자는 에너지를 보존하므로

$$S_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} \propto \delta(E_{p'} - E_p) \tag{22}$$

라고 할 수 있다.

산란 행렬은 들어가고 나가는 상태를 연결해주기 때문에 산란하지 않고 가는 것도 포함된다. 따라서 일반적으로 다음처럼 쓸 수 있다.

$$S_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) - \frac{i}{2\pi m}\delta(E_{p'} - E_p) f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}). \tag{23}$$

여기서 상호작용을 꼭 하는 부분을 f행렬이라고 부르자. 우변 첫항에도 모든 운동량 벡터의 성분이 보존되므로 에너지 보존은 자동이다. 평면파가 다른 평면파로 바뀌는

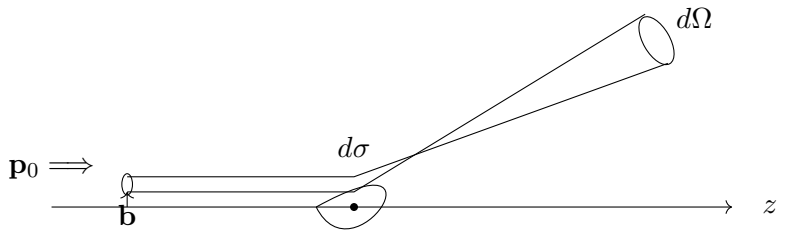


Figure 1: 산란 실험의 공간적 구성. 평균 운동량 $\mathbf{p}_0 = p_0\hat{\mathbf{z}}$인 입자들의 빔을 과녁에 보내면, 과녁의 퍼텐셜 $V(\mathbf{x})$의 영향을 받고 산란되어 공간적으로 퍼져나간다. 이를, 과녁이 있는 원점을 기준으로 Ω의 공간각을 감싸는 검출기로 검출할 수 있다. 빔에 수직한 입자의 면적당 밀도를 n이라고 하면, 검출되는 입자의 갯수는 $n\sigma(\Omega \leftarrow \mathbf{p}_0)$이다.

것만 보여주고 있으며 퍼텐셜이 구대칭을 가지고 있다는 가정은 하지 않았다. 따라서 S 행렬 때문에 들어오는 상태가 다음과 같이 나가는 상태가 된다.

$$\begin{aligned}\psi_{\text{out}}(\mathbf{p}) &= \int d^3p' \langle \mathbf{p}|S|\mathbf{p}'\rangle \psi_{\text{in}}(\mathbf{p}') \\ &= \int d^3p' \left[\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') - \frac{i}{2\pi m}\delta(E_p - E_{p'}) f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}')\right] \psi_{\text{in}}(\mathbf{p}').\end{aligned} \tag{24}$$

나중에는 여러 입자가 서로 상호작용하는 것도 S 행렬로 나타낼 것이다. 이들의 상호작용(또는 퍼텐셜)을 아는 것이 S 행렬을 구하는 것이다. 그러나 상호작용을 몰라도 S 행렬은 로런츠 대칭(회전 대칭 포함), 병진 대칭(합치면 포앙카레 대칭) 게이지 대칭 등을 만족해야 한다. 이 대칭만 알더라도 S의 모양이 상당수 결정된다. 양자 마당 이론은 특히 포앙카레 대칭을 도입하면 모양이 거의 다 결정된다. 다른 것은, 이 S 행렬의 인자(운동량, 에너지, 각운동량 등)가 실수에서 복소수로 확장될 수 있다는 것이다. S의 모양이 더 많이 결정된다. 특히 스펙트럼과 속박 상태에 대한 정보다 복소함수로서의 극(pole)로 반영된다.

4 산란 단면적

어떤 입자가 퍼텐셜 V의 영향을 받아 산란되는 것을 실험으로 검증한다고 해보자. V가 결정하는 S 행렬과 산란 진폭 f를 구한다. 양자역학적인 과정에서는 확률만 알 수 있으므로, 입사 입자를 아주 많이 준비해야 한다.

평균 운동량 $\mathbf{p}_0 = p_0\hat{z}$인 빔(beam)을 쏘아 원점 $\mathbf{x} = 0$ 근처에 있는 과녁(target)

에 쏘면, 그중 일부가 공간각(solid angle) Ω를 감싸고 있는 검출기에 도달한다. 빔의 면밀도를 n이라고 하면, 검출기에 들어오는 입자의 갯수를

$$N(\Omega) = n\sigma(\Omega \leftarrow \mathbf{p}_0) \tag{25}$$

라고 할 수 있다. 여기에서 σ를 산란 단면적(cross section)이라고 정의하고 이름처럼 넓이 단위를 갖는다. 3차원 공간에서 충돌은 2차원에서 이루어지므로 넓이 단위를 갖는 물리량이 자연스럽다. σ는 고전적으로는 '이 안에 들어오면 다 충돌해서 Ω로 보내진다' 고 직관적으로 생각할 수 있다. 예를 들면 점입자를 반지름 r인 과녁에 단단한 공(hard sphere, 공 표면의 퍼텐셜이 무한대)인 경우 전체 단면적은 $\sigma = \pi r^2$이다. 산란은 퍼텐샬에 의한 입자 운동의 변화(양자역학에서는 파동의 변화) 때문에 생기므로, 단면적은 입사 운동량의 함수이고, 산란 후 입자가 나가는 방향의 함수이다.

이를 미시적으로 계산해보자. 들어오는 입자는 S을 통하여 (24)처럼 나가는 상태 ψ_{out}를 얻으며, 아랫줄의 첫번째 항은 산란하지 않고 계속 직진하는 파인데, 입자 검출기를 축에서 벗어난 곳에 놓으면 이를 볼 수 없다. 산란하는 파는 운동량이 $\mathbf{p}$와 $\mathbf{p}+d\mathbf{p}$ 범위에 있다면 공간각 Ω와 $\Omega+d\Omega$사이로 나갈 것이다. 운동량이 크면 충돌 후에도 거의 방향을 바꾸지 않을 것이고, 작으면 영향을 받아 많이 휠 것이다. 그렇게 될 확률은

$$P(d\Omega \leftarrow \psi_{\text{in}}) = d\Omega \int_0^\infty p^2 dp |\psi_{\text{out}}|^2 \tag{26}$$

이다.

입사 입자 하나가 운동량 $\mathbf{p}'$를 가진 파동 꾸러미라고 하고 파동함수 $\phi(\mathbf{p}')$로 기술된다고 해보자. 앞서 이야기한 것처럼 많은 입자들로 빔(beam)을 만들어야 충분한 산란을 시킬 수 있다. 입사 빔을 구성하는 입자들 가운데 z 축에서 벗어난 것도 있을 것이다. 이들의 분포를 다음처럼 생각하자. 먼저 z 축 위에 있는 파동 꾸러미 $\phi(\mathbf{p}')$를 [(16)의 형태로] 생각하자. 그래도 제법 잘 정의된 운동량 $\mathbf{p}'$를 가지고 있다고 보자. 그러면, z 축에 수직하게 $\mathbf{b} = (b_x, b_y, 0)$만큼 떨어진 입자의 파동함수는 $\psi_{\text{in}} = \phi(\mathbf{p}')e^{i\mathbf{b}\cdot\mathbf{p}'}$이다. 운동량 $\mathbf{p}$는 병진이동(translation)의 생성자(generator)이므로 $\mathbf{b}$만큼 이동시킨 파동함수이다. 이들 분포가 완전히 임의적이라고 보고 변위 $\mathbf{b}$의 평균이 0이라고 생각할 수 있다.

위 범위를 덮는 검출기에 들어가는 입자 갯수 N은 확률로 주어진다.

$$N(d\Omega \leftarrow \psi_{\text{in}}) = \int d^2b n P(d\Omega \leftarrow \psi_{\text{in}}). \tag{27}$$

입자들의 분포는 xy방향으로 완전히 임의적으므로 n을 적분 밖으로 빼내도 된다. 이제

$$N(d\Omega \leftarrow \psi_{\rm in}) = n d\sigma(d\Omega \leftarrow \psi_{\rm in}) \tag{28}$$

를 이용하면 $d\Omega$로 나가게 하는 산란 단면적은 다음과 같다

$$d\sigma(d\Omega \leftarrow \psi_{\rm in}) = \int d^2b P(d\Omega \leftarrow \psi_{\rm in}). \tag{29}$$

산란 단면적은, 해당하는 산란이 일어날 확률을 가중치하여 xy평면의 넓이를 구한 것이라 볼 수 있다.

앞서 구한 정상 상태 파동함수를 집어넣되, 입사파가 안 들어오게 실험 장치를 넣는다고 하면

$$d\sigma(d\Omega \leftarrow \psi_{\rm in}) = \frac{d\Omega}{(2\pi)^2 m^2} \int d^2b \int_0^\infty p^2 dp \int d^3p' \delta(E_p - E_{p'}) f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}') e^{-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{p}'} \phi(\mathbf{p}') \\ \times \int d^3p'' \delta(E_p - E_{p''}) f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}'')^* e^{i\mathbf{b}\cdot\mathbf{p}''} \phi(\mathbf{p}'')^*. \tag{30}$$

먼저 보일 것은, 들어가는 상태 운동량 $\mathbf{p}', \mathbf{p}''$이 따로따로인것처럼 보이지만, 사실상 이 둘이 같은 것만 남으며, 따라서 식은 f의 절댓값 제곱이 된다는 것이다. b에 대한 적분부터 하면, $\mathbf{b}$는 xy 평면에만 펼쳐지므로 z성분이 0이고,

$$\int d^2b e^{i\mathbf{b}\cdot(\mathbf{p}''-\mathbf{p}')} = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{p}'_\perp - \mathbf{p}''_\perp) \tag{31}$$

이다. 여기에서 $\mathbf{p}'_\perp$는 벡터의 x, y성분만 있고 z성분은 0이다. 첫줄의 에너지 적분을 이용하여 E'_p와 E_p를 바꿀 수 있으므로 두번째 줄 에너지 적분은

$$\delta(E_{p'} - E_{p''}) = 2m\delta(p'^2 - p''^2) = \frac{2m}{2p_z}\delta(p'_z - p''_z) \tag{32}$$

이 된다. $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$를 이용했다. 다음,

$$p'^2 - p''^2 = p'^2_\perp - p''^2_\perp + p'^2_z - p''^2_z = (p'_z + p''_z)(p'_z - p''_z) \simeq 2p''_z(p'_z - p''_z) \tag{33}$$

에서 앞의 델타 함수 (31) 때문에 수직한 성분이 0이 되고, $p''_z \simeq p'_z$로 근사할 수 있다. 이를 적분하면

$$d\sigma(d\Omega \leftarrow \psi_{\rm in}) = \frac{d\Omega}{m} \int_0^\infty p^2 dp \int d^3p' \frac{1}{p'_z} \delta(E_p - E_{p'}) |f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}')\phi(\mathbf{p}')|^2 \tag{34}$$

이 된다. $E_p = p^2/(2m)$이므로 $pdp = mdE_p$를 이용해서 에너지 적분을 운동량 적분으로 바꿀 수 있다. 이는 p적분을 없애면서 $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$ 조건을 추가한다.

$$d\sigma(d\Omega \leftarrow \psi_{\rm in}) = d\Omega \int_{|\mathbf{p}|=|\mathbf{p}'|} d^3p' \frac{p}{p'_z} |f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}')\phi(\mathbf{p}')|^2 \tag{35}$$

다음, 거시적으로 보며 개개 입자의 운동량은 평균 운동량으로 근사할 수 있다 $\mathbf{p}' = \mathbf{p}_0$으로 근사하면 f를 적분에서 뺄 수 있고, $p' \simeq p'_z$라고 볼 수 있다. 입사하는 파동함수가 규격화되어 있다고 보면 $\int d^3p' |\phi(\mathbf{p}')|^2 = 1$이고, 최종적으로

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(d\Omega \leftarrow \psi_{\rm in}) = |f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0)|^2 \tag{36}$$

를 얻는다. 여기에 xy평면의 면밀도 n을 $d\sigma(d\Omega)$을 곱한 것이 $d\Omega$를 덮는 검출기에 도달하는 입자의 갯수가 된다 [(28)식]. 측정 장치가 더 넓은 각을 덮도록 만들면 그만큼 공간각 Ω을 적분해주면 된다. 면밀도는 빕의 시간당 밀도를 속도로 나누면 된다.

양자 마당 이론에서는 하나의 입자가 퍼텐셜 영향을 받아 휘는 것 뿐 아니라, 상호작용을 통하여 입자의 종류가 바뀔 수도 있고, 입자들의 갯수도 바뀔 수 있다. 나가는 입자의 종류와 운동이 결정되면, 비상대론적인 검증을 할 때와 마찬가지로 나가는 입자들이 지나갈 자리에 적절한 검출기를 설치한다.

이것이 이론을 검증하는 **유일한** 방법이다. 다만, 확률 진폭 f, 또는 이와 사실상 동등한 S 행렬 자체를 이론적으로 이해하는 것이 중요한 의미가 있다. S 행렬은 이론의 대칭(게이지, 내부 대칭, CPT 등)에 대한 불변량으로 이루어지기 때문이다. 양자 마당 이론으로 입자들의 산란을 계산하지만, 그 대칭성을 가지고 S 행렬 자체를 가지고 고정할 수 있는 부분이 많다.

5 S 행렬의 계산, 그린 함수, 산란 진폭

S 행렬 (19)을 계산하기 위하여 산란상태 $|\mathbf{p}\pm\rangle$을 구해야 한다. 이들 상태 벡터를 통하여 들어가고 나가는 상태를 전개했다. 관계식 (12)를 이용하면 묄로 연산자를 이용해서 자유상태와 에너지가 같은 **산란 상태**를 만들 수 있다

$$H|\mathbf{p}\rangle = E_p|\mathbf{p}\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad H|\mathbf{p}\pm\rangle = E_p|\mathbf{p}\pm\rangle. \tag{37}$$

이 식은 **정상상태**(stationary state)의 슈뢰딩거 방정식이다. 퍼텐셜을 통해 **산란되는 파동**을 나타낸다는 것을 기억하자. 앞에서 들어가는 상태와 나가는 상태를 정의해서, 멀리에서 무언가가 와서 다른 멀리 무언가가 나가는 것처럼 묘사했는데도 시간에 대한

의존도는 사라지고, 정상 상태의 파동함수로 기술된다. 이 식을 만족하는 파동함수를 산란 파동함수(scattering wavefunction)이라고 부른다.

이 식을 다시 쓰면

$$(E_p - H^0)|\mathbf{p}\pm\rangle = V|\mathbf{p}\pm\rangle \tag{38}$$

이다. 이 파동함수는 H^0의 고유상태로 전개될 수 있으므로, (37)에 따라 좌변의 연산자는 0이 될 수 있고, 따라서 역이 존재하지 않는다. 이를 위하여 연산자에 $\pm i\epsilon, \epsilon > 0$을 살짝 더해서 변형하자. $V \to 0$일때는 자유 상태가 되므로 $|\mathbf{p}\pm\rangle \to |\mathbf{p}\rangle$이 된다. 이를 반영하면

$$|\mathbf{p}\pm\rangle = |\mathbf{p}\rangle + (E_p - H^0 \pm i\epsilon)^{-1} V|\mathbf{p}\pm\rangle. \tag{39}$$

를 만족한다. 이를 상태 $|\mathbf{p}\pm\rangle$에 대한 리프먼 슈빙거(Lippmann–Schwinger) 방정식이라고 부른다. 들어가고 나가는 상태에 양수 음수 기호를 붙인 것은 이 방정식을 만족한다는 것에서 나왔다.

여기에 위치 고유상태 완비성을 이용하면 파동함수의 방정식으로 쓸 수 있다.

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\pm\rangle = \langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle + \int d^3x' \langle \mathbf{x}|(E_p - H^0 \pm i\epsilon)^{-1}|\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}'|V|\mathbf{p}\pm\rangle. \tag{40}$$

퍼텐셜이 국소적(local)이라고 가정하자.

$$\langle \mathbf{x}'|V|\mathbf{x}\rangle = V(\mathbf{x})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{41}$$

위치 고유상태의 완비성을 한번 더 쓰면 $\int d^3x'' \langle \mathbf{x}'|V|\mathbf{x}''\rangle\langle \mathbf{x}''| = V(\mathbf{x}')\langle \mathbf{x}'|$, 다음을 얻는다.

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\pm\rangle = \langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle + \int d^3x' \langle \mathbf{x}|(E_p - H^0 \pm i\epsilon)^{-1}|\mathbf{x}'\rangle V(\mathbf{x}')\langle \mathbf{x}'|\mathbf{p}\pm\rangle. \tag{42}$$

이 방정식이 알려주는 것은 다음과 같다. 변형된 슈뢰딩거 방정식 (38)을 풀 때, 우변을 퍼텐셜로 생각하지 않고 소스(source)로 생각한다면 우리가 익숙한 전자기학에서 배운 그린 함수 문제다. 역연산자

$$G^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \langle \mathbf{x}|(E_p - H^0 + i\epsilon)^{-1}|\mathbf{x}'\rangle \tag{43}$$

를 자유 그린 함수(의 공간에 대한 표현이)라고 정의하면, 헬름홀츠 방정식을 만족한다

$$\left(\frac{\nabla^2}{2m} + E_p + i\epsilon\right) G^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{44}$$

여기에서는 $+i\epsilon, \epsilon > 0$이 들어 있는 그린 함수만 구한다. 양변에 퍼텐셜을 $V(\mathbf{x}')$ 곱하고 $\mathbf{x}'$로 적분하면 원래 방정식이 나온다. 만약 G^0를 구하고 $V(\mathbf{x}')$을 곱하고 적분하면, 방정식의 해를 얻는다.

편의상 $E_p = p^2/(2m)$이라고 놓자. 운동량 공간에서는 그린 함수를 구체적으로 구할 수 있다. 그린 함수를 푸리에 전개하여, 연산자를 나누어주면

$$\begin{aligned} G^0(E_p + i0) &\equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} G^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\ &= 2m \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{p^2 - k^2 + i\epsilon} \end{aligned} \tag{45}$$

으로 쓸 수 있다. 여기서 k는 $\mathbf{k}$ 벡터의 크기이다. $\mathbf{x} - \mathbf{x}' \equiv \boldsymbol{\rho}$라고 정의하고 이를 기준 축으로 운동량 벡터 $\mathbf{k}$를 생각하자. 부피 적분은 구대칭을 이용해서 $d^3k = k^2 dk d\Omega, d\Omega = d\phi d(\cos\theta)$로 나누어 쓸 수 있다. 방위각(azumithal) ϕ 방향 의존도는 없으므로 적분값은 2π이고, 나머지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G^0(E_p + i0) &= 2m \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{e^{ik\rho\cos\theta}}{p^2 - k^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{m}{4\pi^2} \frac{1}{i\rho} \int_{-\infty}^\infty k dk \frac{e^{ik\rho} - e^{-ik\rho}}{p^2 - k^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \tag{46}$$

마지막 줄에 이 함수가 k에 대한 우함수임을 이용하여 k의 적분 구간을 $-\infty$까지 포함시키고 대신 반으로 나누었다.

연산자에 $i\epsilon$을 넣어 결과적으로 k를 복소수로 확장하게 되었다. k복소평면에는 극(pole)이 두 개 위치한다. 선택에 따라 어떤 극이 들어갈지가 결정된다. 유수 정리(남는 수 정리, residue theorem)

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \tag{47}$$

를 사용할 것이다. C는 시계방향으로 z_0을 둘러싸는 경로(contour)이며, $f(z)$는 다른 극을 가지지 않는다. 실축 전체에 대해서 적분하지만 무한대를 포함하여 닫힌 경로로 적분하자. 허수부가 양인 반원과 음인 반원 두 가지 선택이 있다.

적분식 (46) 안 분모의 극은

$$k = \pm\sqrt{p^2 + i\epsilon} \simeq \pm(p + i\epsilon) \tag{48}$$

에 있다. 다른 ϵ을 다시 정의했지만 어차피 0으로 보낼 것이므로 그냥 쓰자. 식 (46)의 첫 번째 항에는 $e^{ik\rho}$가 있는데, k의 실수부는 진동하도록 하고 허수부가 매우 큰 양수일 때

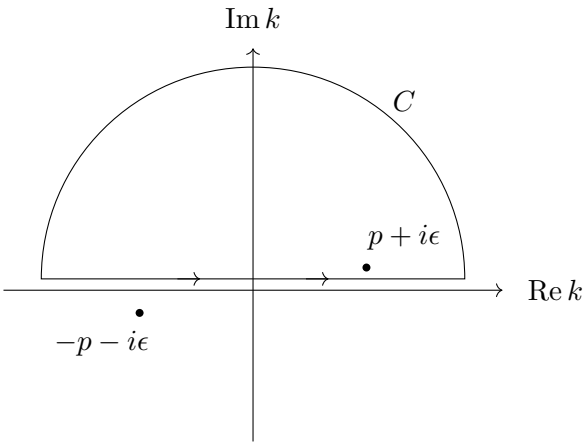


Figure 2: 그린 함수 (46)를 구하기 위하여 k를 복소수로 확장하여 적분한다. 첫 항의 $e^{ik\rho}$는 $\mathrm{Im}\, k > 0$일때 수렴하므로, 허수부가 양수인 반평면에 대해서 적분한다. 무한대를 감싸는 적분은 감쇠하여 0이 되므로, 원래 실축 적분과 같다. 실축 적분 방향은 반시계방향이므로, 유수 정리의 결괏값에 (-1)이 추가된다.

수렴하도록 한다. 이때는 무한대를 포함하는 반원을 복소평면의 윗쪽으로 잡고 폐곡선을 만든다(실수축을 따라가는 것은 C가 반시계방향이므로 적분값에 (-1)이 추가된다). 거기에 들어있는 극은 $k = p + i\epsilon$이다. 따라서 유수 정리 (47)에 따라

$$(\text{첫항}) = (-1)2\pi i \frac{m}{4\pi^2} \frac{1}{i\rho} \frac{k e^{ik\rho}}{p+k}\bigg|_{p=k} = -\frac{m}{4\pi} \frac{e^{ip\rho}}{\rho}. \tag{49}$$

를 얻는다. 계산을 마쳤으니 $\epsilon = 0$라고 놓아도 된다. 두번째 항은 $e^{-ik\rho}$를 포함하고 k의 허수부가 음수일 때 수렴하므로, 그림 2에 나오지 않은 아랫쪽 반원을 잡고 $k = -p - i\epsilon$의 유수를 택하면 (49)과 똑같은 값을 얻는다. 이를 합하면 G^0를 얻을 수 있다.

$$G^0(E + i0) = -\frac{m}{2\pi} \frac{e^{+ip|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \tag{50}$$

가 된다.

6 산란 진폭

앞서 구한 그린 함수를 리프만 슈빙거 방정식에 집어넣으면 일반해를 구할 수 있다. 검출기는 미시적인 입장에서 아주 멀리 있으므로 과녁은 거의 점처럼 보이고 해는 거의 구대을 띨 것이다. 그림 3을 참조하자. 검측기까지 거리를 $r = |\mathbf{x}|$, 과녁에서부터 입자가

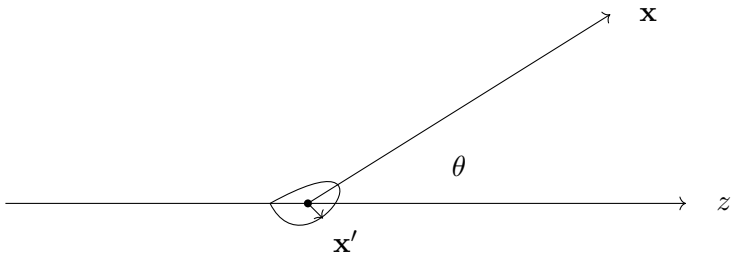


Figure 3: 과녁 크기에 비해 충분히 먼 곳에 검출기가 있고 때는 산란 파동함수 (53)를 사용할 수 있다. 과녁은 구대을 가지고 있지 않아도 된다.

떨어진 거리를 $r' = |\mathbf{x}'|$이라고 하면, $r \gg r'$이므로,

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = (r^2 - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}' + r'^2)^{1/2} \simeq r^2 - \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{x}' \tag{51}$$

이다. 그린 함수의 분모는 첫 항만 근사하고, 위상은 두 항을 다 쓰면 아주 먼 거리에서

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}+\rangle &\underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle - \frac{me^{+ipr}}{2\pi r}\int d^3x' e^{-p\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{x}'} V(\mathbf{x}')\langle \mathbf{x}'|\mathbf{p}+\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - \frac{(2\pi)^2 me^{+ipr}}{r}\langle \mathbf{p}'|V|\mathbf{p}+\rangle\right]\end{aligned} \tag{52}$$

이므로, $\mathbf{x}'$ 적분은 퍼텐셜을 운동량 표현으로 바꾼다. 또 에너지가 보존되므로 $p\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{p}'$를 이용했다. 여기에서

$$f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \equiv -(2\pi)^2 m\langle \mathbf{p}'|V|\mathbf{p}+\rangle|_{E_{p'}=E_p} \tag{53}$$

라고 정의하고, 산란 진폭(scattering amplitude)이라고 부른다. 들어오고 나가는 상태의 에너지가 같다는 것은 유도 과정에서 당연하지만, 나중에 이 식만 찾아보면 잊어버릴까봐 단서를 붙였다. 따라서 정상 상태의 파동함수는 큰 r에서

$$\psi(\mathbf{x}) \equiv \langle \mathbf{x}|\mathbf{p}+\rangle \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})\frac{e^{ipr}}{r}\right]. \tag{54}$$

를 얻는다.[3] 이것이 S 행렬을 표현하는 산란 진폭 (23)을 정의한다. 이 식 (54) 양변에 $\langle \mathbf{p}'|\mathbf{x}\rangle = e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}/(2\pi)^{3/2}$를 곱하고 x를 적분하면 된다. (운동량 델타 함수를 에너지 함수로 바꾸는 과정에서 m이 추가로 나온다. 또, $r \gg 1$일때 f에 근사적으로 구대이 있다고 해야 한다.)

[3]들어오는 상태를 이용했기 때문에 어떤 책에는 $\psi_+(\mathbf{x})$라고 강조해서 쓰기도 한다.

이 모양은 평면파와, 원점에서 시작해서 넓게 바깥쪽으로 퍼져나가는 구형 파동의 중첩임을 알 수 있다. 과녁이 구대이 있다는 가정은 하지 않았으며 비대칭은 계수 $f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$에 들어있다. 평면파는 입사하는 파이며, 구형파는 산란 후 바깥쪽으로 퍼져나가는 파이다. 파동함수에 시간 진행을 시켜보면 + 라벨을 가진 파동함수는

$$\psi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-E_p t)} + f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})\frac{e^{i(pr-E_p t)}}{r}\right] \tag{55}$$

는 시간이 양수로 커지면 r이 커지는 방향으로 퍼져나가고, 정말로 나가는(out)상태가 된다. 이는 그린 함수를 얻을 때 $+i\epsilon$을 택해서 적분했기 때문이다. $-i\epsilon$을 택하면 시간이 지나면서 원점으로 들어가는 파동을 얻는다.

여기에서 구한 '파동함수'는 규격화 가능한 힐버트 공간의 함수는 아니다. 첫항은 자유상태이고 두번째 항이 진짜 산란상태이지만, 모두 에너지 고윳값이 같아 모양이 흐트러지지 않는다. 그러나 이를 기저로 하여 중첩시켜서 파동 꾸러미 (14)를 만들면 규격화 가능한 상태로 만들 수 있고, 공간 상에서 움직이도록 할 수 있다. 그러나, 산란 단면적을 계산하는 식에서 보았듯, 역설적으로 많은 파동 꾸러미들을 평균하면, 우리가 실제 계산하는 양은 이 산란 파동 (54) 하나를 다루는 것과 같다.

입사하는 빔은 z축에 나란히 들어왔지만, 구형 파는 공간의 **모든 방향**으로 퍼져나갔다. 아무리 (고전적으로) 정밀하게 과녁을 겨냥해도, 산란된 입자는 공간 모든 방향에 있는 검출기에 '점'을 남길 수 있다는 말이다. 이 측정 결과는 구대을 깨는 것처럼 보이지만, 측정을 많이 하여 평균을 내면 구대을 가지고 있다. 반대로, 구대을 가지고 있는 충돌 실험이라도 실험을 충분히 하지 않으면 구대을 깨는 검출 결과가 나오며, 파동의 자취를 말하는 것은 의미가 없다. 양자역학의 계산은 평균을 내야만 의미가 있다.

7 T 행렬, 보른 근사

산란 진폭 (53)을 더 대칭적인 모양으로 만들 수 있다. 다음과 같이 T 연산자를 정의하자

$$V|\mathbf{p}+\rangle = V\Omega_+|\mathbf{p}\rangle \equiv T|\mathbf{p}\rangle. \tag{56}$$

여기에 $\langle\mathbf{p}'|$를 씌우면 이른바 T 행렬

$$\langle\mathbf{p}'|V|\mathbf{p}\pm\rangle = \langle\mathbf{p}'|T|\mathbf{p}\rangle = T_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} \tag{57}$$

를 얻는다. $|\mathbf{p}\rangle, |\mathbf{p}'\rangle$은 그냥 평면파이므로, 두 상태의 에너지가 보존된다는 조건을 사용하지는 않았다는 것에 주의하자. 에너지가 보존되는 경우 산란 진폭 (53)을

$$f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \equiv -(2\pi)^2 m \langle \mathbf{p}'|T|\mathbf{p}\rangle|_{E_{p'}=E_p} \tag{58}$$

라고 쓸 수 있다. 리프만 슈빙거 방정식 (39)에 양변에 V를 가하면

$$V|\mathbf{p}+\rangle = T|\mathbf{p} = V|\mathbf{p}\rangle + TG^0V|\mathbf{p}\rangle \tag{59}$$

이라고 쓸 수 있다. 모든 $|\mathbf{p}\rangle$에 대해 이 식이 성립하므로, 이는 T연산자가

$$T(z) = V + VG^0(z)T(z) \tag{60}$$

을 만족하는 것으로 볼 수 있다. 이를 T 연산자에 대한 리프만 슈빙거 방정식이라고 부른다. 앞서 구한 그린 함수를 $G^0(E+i0)$이라고 보면 일반적인 값 z에 대하여 확장할 수 있고, 마찬가지로 $T(z)$도 정의할 수 있다.

보통 해밀토니안이 주어져도 이를 푸는 것은 거의 불가능하다. 따라서 섭동(perturbation)을 생각한다. 자유입자에 대한 슈뢰딩거 방정식의 해를 이용하여 (이들은 완비성(completeness)이 있으므로), 작은 V 때문에 생기는 에너지와 파동함수의 보정을 생각한다.

퍼텐셜이 작음을 강조하기 위하여(또는 결합 상수를 빼내어) V대신 λV라고 쓰고 $\lambda \ll 1$이라고 해보자. T도 λ로 전개할 수 있다.

$$T = \sum \lambda^i T^{(i)}$$

이를 (60)에 집어넣으면

$$T^{(0)} = 0, \quad T^{(1)} = V, \quad T^{(2)} = VG^0V, \quad \dots \tag{61}$$

를 얻는다. 아니면, (60)의 우변 T에 전체 식을 집어넣고 iteration 해도 마찬가지로

$$T(z) = V + VG^0V + VG^0VG^0V + \cdots = (1 - \lambda VG^0)^{-1}\lambda V \tag{62}$$

처럼 전개할 수 있다. 이를 보른(Born) 전개라고 한다. 마찬가지로 산란 진폭 f도 S 행렬도 모두 λ차수마다 계산할 수 있다.

가장 낮은 차수에서 $T = V$이다. 이때 (56)를 보면, 들어오는 상태를 평면파로 근사하는 것이라고 할 수 있다. 이를 이용해서

$$f^{(1)} = -\frac{m}{2\pi}\int d^3x' e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}'}V(\mathbf{x}') \tag{63}$$

임을 알 수 있다. 여기에서 $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$이다. $V = V(r)$이라고 하고, (46)와 같은 방법으로 풀면

$$f^{(1)} = -2m \int_0^\infty r^2 dr \frac{\sin qr}{qr} V(r) \tag{64}$$

이 됨을 알 수 있다. 여기에서 알 수 있는 것은 운동량 차가 없어 $q \to 0$일때, 즉, 산란을 **해도** 운동량이 바뀌지 않고 앞으로 계속 나가는 파의 산란 진폭이 상수라는 것이다.

유카와 퍼텐셜 (8) 에 대하여 산란 진폭을 구하면

$$f^{(1)}(\theta) = \frac{2mk}{\mu} \frac{1}{q^2 + \mu^2} \tag{65}$$

을 얻는다. 에너지가 보존되므로 $\mathbf{p}$와 $\mathbf{p}'$의 크기가 같아 $\mathbf{q}$를 포함한 삼각형은 이등변 삼각형이 되고, 이의 사잇각 즉 산란 이후 축에서 벗어난 각도 θ는 $q = 2p \sin \frac{\theta}{2}$를 만족한다. 이를 이용하면 $\mu \to 0$인 극한에서 쿨롱 퍼텐셜이 되며, 고전역학을 이용한 러더퍼드 마스덴 계산과 같은 꼴, 특히 $4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$에 반비례함을 알 수 있다. 쿨롱 퍼텐셜은 공간각에 대해서 적분하면 무한대로 발산함을 알 수 있는데, 앞의 퍼텐셜 조건을 만족하지 못해서 충분히 약해지지 않기 때문이다.

2차 전개를 해보면

$$f^{(2)} = -(2\pi)^2 m \langle \mathbf{p}' | V G^0 V | \mathbf{p} \rangle. \tag{66}$$

이다. 섭동이 유효하려면 이의 크기가 $f^{(1)}$의 크기보다 매우 작아야 한다. 유카와 퍼텐셜의 경우 낮은 에너지에서는 이것이 성립하지 않음을 알 수 있다. 충분히 높은 에너지 $q > \mu$에만 성립하는데, 그렇게 되면 비상대론적인 섭동을 믿을 수 없게 된다.

운동량의 완비성을 이용해서 써보면

$$f^{(2)} = -(2\pi)^2 m \int d^3k \langle \mathbf{p}' | V | \mathbf{k} \rangle \frac{1}{E_{p'} - E_k + i\epsilon} \langle \mathbf{k} | V | \mathbf{p} \rangle. \tag{67}$$

라고 쓸 수 있다. 처음 시작하는 운동량 $\mathbf{p}$에서, 퍼텐셜의 영향 때문에 $\mathbf{k}$인 상태로 바뀌었다가, 그린 함수에 따라 변형된 후, 다시 V의 영향을 받아 최종적으로 $\mathbf{p}'$인 상태가 된다. 원한다면 이를 그림으로 나타낼 수 있다. 이를 파인만 도표(Feynman diagram)이라고 한다. 거꾸로, 이 그림을 그릴 수 있으면 높은 차수의 섭동식도 그림에서 읽을 수 있다.

산란 진폭 f를 정의할 때, 에너지가 $\mathbf{p}$에서 $\mathbf{p}'$상태로 가는 최종 단계에서는 보존된다는 조건을 걸었다. 원칙적으로 $\langle \mathbf{p}' | V | \mathbf{k} \rangle$ 등의 중간 단계는 보존될 필요가 없다. 임시로 에너지 보존을 만족하지 않는 상태가 될 수 있다. 이를 가상(virtual) 상태라고 부를 수 있다.

8 구대이 있는 자유상태

퍼텐셜이 구대을 가지고 있다면 $V = V(r)$ 상호작용하는동안 각운동량이 보존된다. 따라서 S 행렬은 회전해도 같다.

$$[\mathbf{L}, S] = 0 \iff \langle \mathbf{p}'|S|\mathbf{p}\rangle = \langle R\mathbf{p}'|S|R\mathbf{p}\rangle. \tag{68}$$

R은 회전 행렬이다. $S = 1 - 2\pi i\delta f$이므로, f는 에너지와 산란각 θ에만 의존한다.

$$f = f(E_p, \theta). \tag{69}$$

S는 H^0도 보존하므로, (H^0, L^2, L_z)의 고유상태 $|E, l, m\rangle$를 기저로 하여 전개한다. 양자역학에서 배운 것처럼 공간 표현은 다음과 같다.

$$\langle \mathbf{x}|E, l, m\rangle = i^l \left(\frac{2mp}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{pr} j(pr) Y_l^m(\hat{z}). \tag{70}$$

여기에서 $j(z)$는 구면 베셀 함수이고, Y_l^m는 구면 조화 함수이다. 완비성은 다음과 같다.

$$\langle E', l', m'|E, l, m\rangle = \delta(E' - E)\delta_{l'l}\delta_{m'm}. \tag{71}$$

이는 규격화가 안되지만 기저로 써서 유한한 파동 꾸러미를 만들 수 있다.

구면 조화 함수는 수소원자 오비탈 모양이고 각 방향으로 푸리에 전게처럼 함수를 전개하는 기저가 된다. 구대칭이 있기 때문에 이 부분은 변하지 않는다.

파동함수를 $\psi(\mathbf{x}) = NY(\theta, \phi)R(r)$ 처럼 분해할 수 있다(N은 규격화 상수). 반지름 방향 파동함수 $\phi(r)$에 대하여 $\phi(r) = rR(r)$처럼 놓으면 이는 사실상 일차원의 슈뢰딩거 방정식

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + p^2\right]\phi(r) = 0. \tag{72}$$

을 만족한다.

일반적인 l에 대해 $r \to 0$이면 r^{-2} 항만 중요하므로, 그 근처에서 해가 r^{l+1} 또는 r^{-l} 처럼 행동한다. 규격화 할 수 있는 물리적인 해는 $\phi(r) \sim r^{l+1}$처럼 행동하는 함수이고, $p > 0$일때 (리카티) 베셀 함수 $\phi(r) = \hat{\jmath}_l(pr) \equiv pr j_l(pr)$가 이를 만족한다. 두 함수를 Figure 4 에 그렸다. 이것이 정규(regular) 해가 된다. $\hat{\jmath}_l(pr)$에 비해 $j_l(pr)$은 구면을 만들면서 공간으로 퍼져나가므로 감쇠가 $1/r$만큼 일어나며 절댓값 제곱은 $1/r^2$처럼 줄어든다. 3차원 공간의 성질이다.

s 파인 $l = 0$인 경우에 $\hat{\jmath}_0(pr) = \sin(pr)$이므로 $\hat{\jmath}$가 나올때마다 사인 함수를 떠올리면 직관적으로 생각할 수 있다. $l = 1, 2$인 경우 $r \simeq 0$근처에서 각각 $\hat{\jmath}_l(r) \simeq r^2, r^3$임을

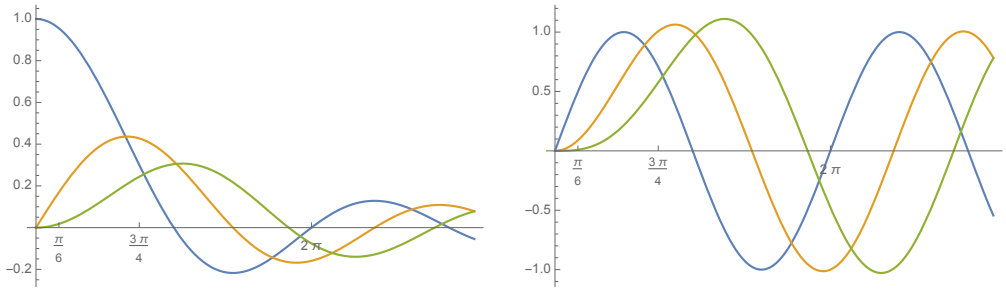


Figure 4: 구형 베셀 함수. 왼쪽 그림은 반지름 방향 파동함수인 구형 베셀 함수 $j_l(r)$. 크게 진동하는 순서대로 본문의 $j_l, l = 0, 1, 2$에 해당한다. 오른쪽은 $\hat{j}_l = j_l(r)/(pr)$이며 방정식 (72)의 해이다. $\hat{j}_0$인 함수는 사인 함수와 같으며 r이 클 때 위상이 $\pi l/2$씩 오른쪽으로 이동한다. 왼쪽 함수는 구면을 만들면서 공간으로 퍼져나가므로 감쇠가 $1/r$만큼 일어난다.

그림에서 확인할 수 있다. r이 클때는 l이 들어 있는 항을 무시할 수 있어 해가 사인 함수인데, 원점으로 갈 때 매끈하게 이어져야 하므로 위상이 $-\pi l/2$이동하면서 그림과 같이 된다. 일차원의 자유입자를 퍼텐셜 $l(l+1)/r^2$에 산란시킨 것이라고 생각하면, 퍼텐셜을 더 추가해도 비슷한 일이 일어나리라 예상할 수 있다.

코사인에 해당하는 것은 $\phi'(0) = 0$인 노이만 함수 $\hat{n}_l(pr)$이고, $\hat{n}_0(pr) = \cos(pr)$이다. 일반적인 해는 베셀 함수와 노이만 함수의 선형 결합으로 쓸 수 있는데, 조금 더 간단한 함수를 쓸 수 있다. 이들을 복소화한 한켈(Hankel) 함수이다.

$$\hat{h}_l^{\pm}(z) = \hat{n}_l(z) + i\hat{j}_l(z). \tag{73}$$

$l = 0$일때 사인과 코사인을 지수함수로 만들어주는 오일러 공식과 관계가 같다. 일반적인 l에 대해

$$r \to \infty : \hat{h}_l^{\pm}(z) \to e^{\pm i(z - \pi l/2)} \tag{74}$$

처럼 행동한다. 따라서, $\hat{j}_l(z), \hat{n}(z)$도 r이 클 때 위상이 $-\pi l/2$만큼 차이가 나야 한다. 여기에 있는 함수를 표에 요약했다.

이들 함수는 우함수이거나 기함수이고, l이 1씩 커지면 성질이 반대가 된다.

9 상호작용, 위상 이동과 부분파

이제 상호작용을 생각하자.

	$l=0$	$l=1$	$l=2$
$\hat{j}_l(z)$	$\sin z$	$\frac{1}{z}\sin z - \cos z$	$\left(\frac{3}{z^2}-1\right)\sin z - \frac{3}{z}\cos z$
$\hat{n}_l(z)$	$\cos z$	$\frac{1}{z}\cos z + \sin z$	$\left(\frac{3}{z^2}-1\right)\cos z + \frac{3}{z}\sin z$
$\hat{h}_l^{\pm}(z)$	$e^{\pm iz}$	$\left(1 \pm \frac{i}{z}\right) e^{i(z-\pi/2)}$	$\left(1 \pm \frac{3i}{z} - \frac{3}{z^2}\right) e^{\pm i(z-\pi)}$

S가 회전 대칭 (68)를 가지고 있으므로, 각운동량을 보존하고, 가장 일반적인 모양은

$$\langle E', l', m'|S|E, l, m\rangle = \delta(E'-E)\delta_{l'l}\delta_{m'm}s_l(E) \tag{75}$$

이다. 에너지도 보존하기 때문이다. 위그너 에카르트 정리에 따라 s_l은 m에 의존하지 않는다. 이를 쉽게 볼 수 있는 방법은 $L_-SL_+ = SL_-L_+$를 이용해서 상태를 하나 올린 것과 비교하는 것이다. 불변임을 알 수 있다.

S는 유니터리이므로 고윳값의 절댓값은 1이다. 위상만 있다. 이를

$$s_l(E) = e^{2i\delta_l(E)} \tag{76}$$

이라고 정의하자.

구면 조화 함수를 푸리에 변환하면 운동량 공간의 표현을 얻는다.

$$\langle \mathbf{p}|E, l, m\rangle = (mp)^{-1/2}\delta(E_p - E)Y_l^m(\hat{\mathbf{p}}). \tag{77}$$

들어가는 운동량 $\mathbf{p}$ 방향을 z축으로 고정하면, 방위각 대칭에 따라 $m=0$ 만 생각하면 된다. 나가는 운동량 $\mathbf{p}'$에 대해 $\hat{\mathbf{p}}'\cdot\hat{\mathbf{p}} = \cos\theta$가 되고, 이때 구면 조화 함수는 르장드르 다항식

$$Y_l^0(\hat{\mathbf{p}}') = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} P_l(\cos\theta) \tag{78}$$

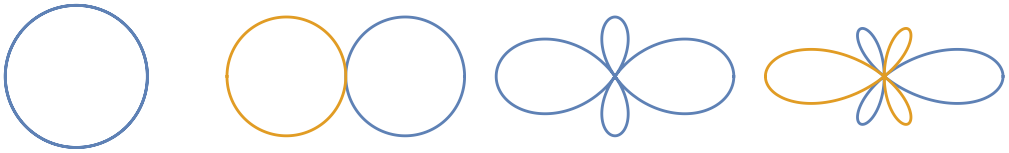
가 된다. 이를 그림 5에 나타내었다. l이 홀수이면 기함수, 짝수이면 우함수이다.

S 행렬의 상호작용하는 부분의 산란 진폭이 다음과 같음을 기억하여

$$S - \mathbf{1} = \frac{i}{2\pi m}\delta(E'-E)f(E_p, \theta) \tag{79}$$

양변에 $\langle \mathbf{p}'|$와 $|\mathbf{p}\rangle$을 샌드위치하고 각운동량 고유상태의 완비성을 이용하면 좌변은

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p}'|(S-\mathbf{1})|\mathbf{p}\rangle &= \int dE \sum_{l=0}^{\infty}\langle \mathbf{p}'|(S-\mathbf{1})|E,l,0\rangle\langle E,l,0|\mathbf{p}\rangle \\ &= \frac{1}{mp}\sum_l Y_l^0(\hat{\mathbf{p}}')[s_l(E)-1]Y_l^0(\hat{\mathbf{p}})^*\delta(E_{p'}-E_p)\end{aligned} \tag{80}$$



$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \tfrac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right), \quad P_3(x) = \tfrac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$

Figure 5: 르장드르 다항식과 $|P_l(\cos\theta)|, l = 0, 1, 2, 3$의 그래프. 실제로는 가장 긴 축의 길이가 모두 같다. l이 홀수이면 기함수여서 절댓값을 취하지 않으면, 반만 그려진 그래프 둘이 겹친다.

이 된다. 에너지 적분을 운동량 적분으로 바꾸는 것은 (32)에서 해봤다. S 연산자가 구면 조화 상태에 가해지면 위상 (76)이 나온다. 위상은 수이므로 밖으로 빼낼 수 있고, (80)는 결국 각운동량 고유상태의 운동량 표현 (77)을 이용했기 때문이다. 델타 함수 하나는 dE 적분을 없애는 데 썼으므로 하나만 남았다.

이제, (79)의 양변을 비교하면 부분파(partial wave) 전개

$$\begin{aligned} f(E,\theta) &= \frac{1}{2ip}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(s_l(E)-1)P_l(\cos\theta) \\ &\equiv \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)f_l(E)P_l(\cos\theta) \end{aligned} \tag{81}$$

를 얻을 수 있다. 이렇게 부분파 진폭(partial-wave amplitude)

$$f_l(E) = \frac{s_l(E)-1}{2ip} = \frac{e^{2i\delta_l(E)}-1}{2ip} = \frac{e^{i\delta(E)}\sin\delta_l(E)}{p} \tag{82}$$

을 정의했다. 맨 오른쪽 변의 사인 함수를 생각하면 s_l 고윳값 (76)의 위상을 $2\delta_l$로 정의하는 것이 편하다.

간단한 예로 단순한 우물을 생각해보자. $V(r) = -V_0 < 0, r < a$ 이고 밖에서는 $V(r) = 0$이다. $r > a$에서는 점근적으로 평면파가 될 것이다. 이때의 에너지를 E라고 하면 $r < a$에도 운동 에너지가 $p^2/2m = E + V_0$이어서 더 높은 진동수, 짧은 파동으로 진동하는 파가 된다. 이 둘은 매끄럽게 연결된다. 바깥쪽 평면파는 원점에서 0이 되는 파에 비교하면 위상이 δ만큼 차이나는 파가 된다.

10 구대칭이 있는 산란상태

이를 주는 고유상태는 상호작용이 포함된 구면파이다. 묄러 연산자를 이용하면, 산란하는 구면파는 다음처럼 변한다

$$|E, l, m+\rangle = \Omega_+ |E, l, m\rangle. \tag{83}$$

이는 산란이 일어나는 내내 구대이 유지되기 때문이다. 다시 말해 묄러 연산자와 각운동량 연산자가 교환 가능하다 $[\Omega_+, \mathbf{L}] = 0$. 공간각 방향에는 변화가 없으므로 그대로 구면 조화 함수 Y_l^m을 쓸 수 있다.

반지름 방향은

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r) + p^2\right] \psi_{l,p}(r) = 0 \tag{84}$$

을 만족한다. 여기서 $U(r) \equiv 2mV(r)$이다. 반지를 방향만 바뀌므로 자유 상태함수 (70)에서 반지름 방향만 다른 함수 $\psi_{l,p}(r)$를 쓰고

$$\langle \mathbf{x}|E, l, m+\rangle = i^l \left(\frac{2m}{\pi p}\right)^{1/2} \frac{1}{pr} \psi_{l,p}(r) Y_l^m(\hat{z}). \tag{85}$$

이라고 쓴다. 앞서와 마찬가지로 정규 해는 $\psi_{l,p}(r = 0) = 0$인 해이다. 상호작용 때문에 퍼텐셜 $U(r)$이 추가되어도 $r \to \infty$일때 $U(r)$이 충분히 작아진다면 정규 해는 구면 베셀 함수와 비슷해질 것이고, 원점에서의 해와 매끄럽게 이어지려면 추가적인 위상차가 있어야 할 것이다.

구면 좌표계를 도입해도 물리는 같다. $\psi_{l,p}(r)$도, 자유상태 $\hat{j}_l(p)$가 작은 퍼텐셜 $U(r)$를 섭동으로 하는 리프만 슈빙거 방정식을 만족한다.

$$\psi_{l,p}(r) = \hat{j}_l(pr) + \int_0^\infty dr' G^0_{l,p}(r, r') U(r') \psi_{l,p}(r'). \tag{86}$$

여기에서 자유 그린 함수 $G^0(r, r')$는 (72)식 연산자의 역수로 구한다.

먼저 간단한 $l = 0$을 다시 생각하자. 자유 정규해는 사인파이고, 리프만 슈빙거 방정식을 적분한 모양은

$$\psi_{l,p}(r) = \frac{\sin(pr)}{p} + \frac{1}{p} \int_0^r dr' \sin(p(r - r')) U(r') \psi_{l,p}(r') \tag{87}$$

이다. 이는 상호작용이 있을 때의 정규해이다.

퍼텐셜이 있으므로 $r \to 0$에서 r^{-l+1}이었던 해도 규격화 가능한 해가 될 수 있다. 요스트는 비정규해를 얻었다(Jost solution)

$$\mathsf{f}_0(\pm p, r) = e^{\pm ipr} - \frac{1}{p} \int_r^\infty dr' \sin(p(r - r')) U(r') \mathsf{f}_0(\pm p, r'). \tag{88}$$

이는 $r \to \infty$에서 $e^{\pm ipr}$ 처럼 행동하지만 $r = 0$에서 $\mathsf{f}_0(\pm, r = 0) = 1 \neq 0$이다.

이제 일반적인 l에 대해 생각해보자. 퍼텐셜이 없을 때는 모든 r에 대하여 $\psi_{l,p}(r) = \hat{\jmath}(pr)$이 되어야 한다는 것을 알고 있다. 퍼텐셜이 있을 때 경계조건이 $\psi_{l,p}(r = 0) = 0$인 정규해는, 앞서 (70) 처럼

$$r \to \infty : \quad U(r) \to 0, \quad \psi_{l,p}(r) \to \hat{\jmath}_l(pr) \tag{89}$$

임을 기대할 수 있다.

이제, 평면파의 파동함수를 구면 조화 함수를 사용하여 쓰면

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} pr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \hat{\jmath}_l(pr) P_l(\cos\theta) \tag{90}$$

이므로 산란 파동함수는

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}+\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} pr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \psi_{l,p}(r) P_l(\cos\theta) \tag{91}$$

라 쓸 수 있다.

이제 이를 r이 클 때 산란 파동함수 (54) 에 적용하자.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}|\mathbf{p}+\rangle &\underset{r\to\infty}{\to} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle + f(E_p, \theta) \frac{e^{ipr}}{r} \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} pr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[i^l \hat{\jmath}_l(pr) + p f_l(pr) e^{ipr} \right] P_l(\cos\theta) \end{aligned} \tag{92}$$

우변의 첫 항은 평면파 (90)에서 온 것이고, 마지막 항은 부분파의 정의 (81)에서 온 것이다.

특정한 l에 대해서만 보자면

$$\psi_{l,p}(r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \hat{\jmath}_l(pr) + p f_l(pr) e^{ipr} i^{-l} \tag{93}$$

이다. 이는 $e^{ipr} i^{-l} = e^{i(pr - l\pi/2)}$ 부분이 사실상 한켈 함수가 되기 때문이다.

$$\psi_{l,p}(r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \hat{\jmath}_l(pr) + p f_l(pr) \hat{h}_l^+(pr). \tag{94}$$

여기에서 $p f_l$을 위상을 이용해서 표현하면

$$\psi_{l,p}(r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} e^{i\delta_l(p)} \sin\left[pr - \tfrac{1}{2} l\pi + \delta_l(p) \right] \tag{95}$$

가 된다. 평면파일 때에 비해서 위상 $\delta_l(p)$만큼의 변화가 있다는 것을 알 수 있다. 이제부터는 s_l 과 δ_l을 에너지가 아닌 운동량 크기 p의 함수로 보겠다.

11 속박 상태

속박 상태는 $r \to \infty$에서 에너지가 V보다 작은 상태이다. 수소 원자에서 쿨롱 퍼텔샬에 갇힌 파가 대표적인 예이다. $V(\infty) = 0$으로 정해서 에너지가 음수이고, 자유 상태가 되는 것은 에너지가 0이 되도록 올려주는 것이다. 속박 상태는 이산화된 상태이다. 산란 상태는 에너지가 양수가 된다.

양자역학에서는 파동함수를 다루어서 이렇게 알 수 있지만, 퍼텐셜을 알기 어려운 경우나, 양자마당이론에서 속박 상태를 S 행렬을 관찰해서 알 수 있다.

산란 파동의 l 성분 (94)에 관계식

$$\hat{\jmath}(z) = \frac{\hat{h}^+(z) - \hat{h}^-(z)}{2i}, \quad p\mathsf{f}_l(z) = \frac{s_l(z) - 1}{2i} \tag{96}$$

를 집어넣으면

$$\psi_{l,p}(r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2i}\left[\hat{h}^-(pr) - s_l(p)\hat{h}^+(pr)\right]. \tag{97}$$

이 된다. 물론 위 식은 정규해를 기술해야 하므로 $r \to \infty$에서의 점근함수이지만 원점에서는 0이 된다. 각각의 항도 해가 되지만 정규해는 아니다. $\hat{h}^{\pm}(pr)$은 원점에서 1이 됨에 주의하자. 위 식은 원점에서 두 항이 상쇄되어 0이다.

원래 이 해는 p가 실수일 때 의미가 있다. 하지만 $s_l(p)$를 복소 영역까지 확장할 수 있다. 정규화를 다르게 하여

$$\phi_{l,p}(r) \to \frac{i}{2}\left[\mathsf{f}_l(p)\hat{h}_l^-(pr) - [\mathsf{f}_l(p)]^*\hat{h}_l^+(pr)\right]. \tag{98}$$

를 생각하자. 즉,

$$\psi_{l,p}(r) = \mathsf{f}_l(p)\phi_{l,p}(r) \tag{99}$$

처럼 한 것이다. 한켈 함수들이 복소 켤레이므로 계수들도 복소 켤레인, 대칭인 모양이다. 그러면 파동함수는 에르미트 함수가 된다. 이 계수도 운동량 크기 p에 대한 함수 $\mathsf{f}_l(p)$라 볼 수 있고, 이를 요스트(Jost) 함수라 한다. 이때는 s_l을 다음처럼 쓸 수 있다.

$$s_l(p) = \frac{[\mathsf{f}_l(p)]^*}{\mathsf{f}_l(p)}. \tag{100}$$

만약 $p = \bar{p}$에서 $\mathsf{f}_l(\bar{p}) = 0$이면 해는 $\hat{h}^-$로 기술된다. 이는 바깥으로 퍼져나가는 파가 아니므로 흥미로운 해는 아니다. 반대로

$$\mathsf{f}_l^*(\bar{p}) = 0 \tag{101}$$

이면 파동함수는

$$r \to \infty : \quad h^+(\bar{p}r) \to e^{i(\bar{p}r - l\pi/2)} \tag{102}$$

처럼 행동한다. $\bar{p}$의 허수부가 양수라면 $\mathrm{Im}\,\bar{p} > 0$, 파동함수 $r \to \infty$일때 $\psi_{l,\bar{p}}(r)$는 0으로 다가가서 규격화 가능한 함수가 된다. 이것이 속박 상태이다.

$\bar{p}$가 복소수이면 일반적으로 $\mathsf{f}_l(\bar{p})$와 $[f_l(\bar{p})]*$가 동시에 0이 안된다.

12 S 함수의 해석성

복소수 z에 대한 함수 f가 어떤 영역 R에서 (무한 차수) 다항식으로 테일러 전개가 가능하면 해석(analytic) 함수라고 한다. 그러기 위해서는 무한번 미분 가능해야 하고, R에서 테일러 전개가 수렴해야 한다.

이미 운동량을 복소수로 확장하여 그린 함수를 이에 대한 해석 함수로 보고, 유수 정리(residue theorem)을 써서 적분을 쉽게 계산할 수 있었다. 무엇보다 중요한 성질은 영역 R과 겹치는 R'로 해석 연속(analytic continuation)을 시킬 수 있다. 겹치는 부분 $R \cap R'$에서 함수가 다른 복소수로 표현이 되고, 이것이 R'에서 잘 정의되면, 이 함수는 $R \cup R'$에서 모두 해석성이 있다.

함수가 f 해석 함수이려면 복소수 R의 좌표 z에만 의존한다는 홀로모피 성질이 있어야 한다.

$$f = f(z) \tag{103}$$

이고 z^*에 의존하지 않아야 한다.

요스트 함수 $\mathsf{f}_l(p)$는 실축에서 잘 정의되었다. $\mathrm{Im}\,p > 0$인 영역에서 $\psi_{l,p}(r)$이 p에 대하여 발산하지 않고 여러번 미분 가능하면 이때 $\mathsf{f}_l(p)$도 해석 함수가 된다. 그러나 $[\mathsf{f}_l(p)]^*$는 p에 대한 함수가 아니므로 p에 대한 해석 함수가 아니다. 따라서 $s_l(p)$를 (100)로 써보면 해석 함수가 될 수 없다.

물론 R안에서 좌표가 z라는 것은 설정하기 나름이다. 어떤 공간에서는 z^*로 복소공간을 만들 수도 있다. 위의 논리를 적용하면 $\mathrm{Im}\,p < 0$ 영역에서 $[\mathsf{f}_l(p)]^*$는 p^*에 대해서는 해석 함수이다.

$$[\mathsf{f}_l(p)]^* = \mathsf{f}_l^*(p^*). \tag{104}$$

다른 성질은, 사인 코사인의 성질처럼 p에 대한 우함수 기함수 성질 때문에

$$\mathsf{f}_l^*(p^*) = \mathsf{f}_l^*(-p) \tag{105}$$

이다.

$\mathsf{f}_l(p)$와 $\mathsf{f}_l^*(-p)$는 p가 실수일 때 잘 정의되므로 이들을 실축을 교집합으로 해서 복소 연속하면 이들과 이들의 비인 $s_l(p)$를 해석 함수로 만들 수 있지 않을까? 일반적으로는 안 되지만 실제로는 퍼텐셜에 의존한다. 만약 $V(r)$이 유카와 퍼텐셜 (8)이면 상당히 넓은 부분에서 해석 함수가 될 수 있다. $-\mu/2 < \mathrm{Im}\, p < \mu/2, \mathrm{Re}\, p = 0$인 선을 제외하고 확장된다.

$s_l(p)$의 역수가 0이 되도록 하는 $p = \bar{p}$를 극(pole)이라고 한다. $s \sim a/(p - \bar{p})$처럼 행동한다. S 행렬은 극을 가지고 있고, 이외에는 적절한 영역에서 해석 함수이가 될 수 있다. 유한 개의 극이 존재하고 이를 제외한 곳에서 해석적인 함수를 메로모피(meromorphic) 함수라고 한다.

에너지가 실수이기를 바라면 $\bar{p}$는 순허수가 되어야 한다 $\bar{p} = i\alpha$. 에너지는 음수이니 $V(r \to \infty) = 0$보다 작어 속박 상태가 됨을 알 수 있다.

따라서 속박 상태를 가질 조건은 위상 $s_l(p)$가 $\mathrm{Im}\, p > 0$ 축 위에서 극을 가진다는 것이다.

13 스펙트럼 표현

지금까지 논의를 종합해보자. S 행렬을 입사 운동량 크기 $p = \sqrt{\mathbf{p}^2}$의 복소 함수로 확장하여, 해석 함수로 볼 수 있다. p가 양수인 실축에서는 정의되지 않는데 이는 식 (67)를 통해 S 행렬을 계산해보면 E_k가 있는 곳마다 분모가 0이 되기 때문이다. E_k가 이산적이라면 (가령, 산란이 아닌 조화 진동자의 섭동처럼) S가 정의되지 않는 곳은 p 복소평면의 실축 양수쪽에 이산적인 점들로 표현이 될 것이다. 실제로는 분모가 0이 되는 곳이 $p^2 = 2mE_k$이기 때문에 $p \geq 0$인 실축 전체가 된다. 나중에 상대론을 생각하면 최소 에너지가 입자의 정지 에너지가 되어 모든 실축은 아닐 것이다.

속박 상태는 $\mathrm{Im}\, p > 0$인 곳에 셀수있는(countable) 이산적인 점들이 찍힐 것이다. 나중에 상대론을 생각하면 입자들의 속박 상태 에너지가 절대 음수가, 아니라 (가령 두 입자라면) 질량 제곱 합에서 음수 에너지를 뺀 값일 것이다.

14 상호작용 묘사

시간에 대한 섭동으로서 산란을 생각해본다. 또 클러스터 군집 원리와 로런츠 대칭을 도입한 양자 역학이 양자 마당 이론이 되어야 한다는 것을 간략하게 서술한다.

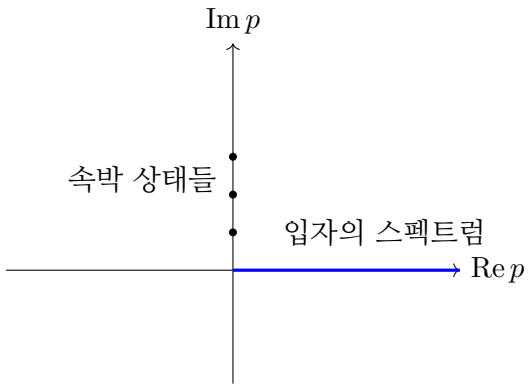


Figure 6: 해석 함수로서의 S 행렬. 구대이 있는 경우 고윳값 $s_l(p)$를 적절한 영역에서 p를 복소수로 보고 함수로 볼 수 있다. 이 함수가 잘 정의되는 곳은 그림의 양의 실축과 점을 뺀 지점이다. 양의 실축은 스펙트럼의 에너지 고윳값이고, 연속적이다. 허수의 양수축에는 $s_l(p)$의 단순한 극들이 있고, 속박 상태를 나타낸다. 퍼텐셜의 영향이 작을수록 더 넓은 범위에서 해석함수가 된다. 여기에는 이야기하지 않지만, 허수부가 작은 음수일때는 약하게 결합했다가 곧 붕괴하는 공명 상태가 된다. 이와 비슷하게 가상 상태도 있다.

산란 연산자 (18)는 묄러 연산자로 표현되었다.

$$S = \Omega_-^\dagger \Omega_+ = \lim_{t_0 \to -\infty, t \to \infty} e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0} \tag{106}$$

시간에 대한 극한을 뺀 연산자를 $U(t, t_0)$이라고 하고 이를 다음처럼 쓸 수 있다.

$$S = \lim_{t_0 \to -\infty, t \to \infty} U(t, t_0). \tag{107}$$

$U(t, t_0)$는 S 행렬을 일반화해서 과거 시각 t_0의 어떤 상태에서 미래 시각 t로 옮겨주는 유니터리 연산자이다. 어떤 시각 t_0의 상태를 $|\psi; t_0\rangle$라 하자. $U(t, t_0)$는 이를 시각 t의 상태 $|\psi; t\rangle$로 변화시키는 연산자로 생각할 수 있다.

$$|\psi; t\rangle_I = U(t, t_0)|\psi; t_0\rangle_I. \tag{108}$$

시간을 무한대로 보내면 퍼텐셜의 영향이 사라지지만, 유한한 시간에서는 퍼텐셜의 영향이 살아남는다. 두 해밀토니안의 차이는 $H - H^0 = V$이므로, 이 상태의 시간 진행 해밀토니안은 대략 V만으로 진행될 것 같다. 섭동을 통해서 계산한다면 V 때문에 생기는 효과만 따지는 것이 편리할 것이다. 이런 식으로 시간 진행을 시킬 수 있을까? $t = 0$

일때 산란 상태의 '초기 조건' $|\psi\rangle$을 전체 해밀토니안으로 진행시키는 대신

$$|\psi;t\rangle_I = e^{iH_0t}e^{-iHt}|\psi\rangle \tag{109}$$

로 진행시키면 (107)처럼 시간 진행하는 것을 확인할 수 있다. 물론 $|\psi;0\rangle_I = |\psi\rangle_S$이다.

파동함수와 연산자의 시간 진행 의존성을 다르게 할 자유가 있다. 이를 묘사(picture)라고 한다. 슈뢰딩거 묘사(Schrödinger picture)에서, 연산자가 시간에 불변하고 상태가 시간에 따라 변한다. 하이젠베르크 묘사는 반대이다. 우리는 언제나 기댓값 또는 변환 확률만을 볼 수 있기 때문에 두 묘사는 대등하다.

$$\langle\phi|O|\psi\rangle \to \langle\phi|e^{iHt}Oe^{-iHt}|\psi\rangle. \tag{110}$$

시간 진행 연산자를 어디에 붙이는가의 문제이다. 디랙은 위에서 슈뢰딩거 연산자에 H_0만 가지고 시간 진행을 시켜놓으면,

$$O_I(t) = e^{iH_0t}O_Se^{-iH_0t}, \tag{111}$$

상태 진행이 (108)가 된다는 것을 발견했다. 시간 t_0에서 t_1을 거쳐 t까지 진행하는 것은

$$U(t,t_0) = U(t,t_1)U(t_1,t_0) \tag{112}$$

가 됨을 확인할 수 있고, 이 U 연산자는 군처럼 행동하지만 교환법칙이 성립하지 않는, 준군(semigroup)을 이룬다. 상태 $|\psi\rangle$에 $U(t,t_0)$를 여러개 가할 때, 오른쪽부터 가해지고, 두 개를 곱하면 왼쪽 연산자가 더 나중 시간을 나타내는 것을 기억하자.

이 유니터리 연산자가 시간에 따라 변하는 것이 슈뢰딩거 방정식과 닮았다.

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}U(t,t_0) &= ie^{iH_0t}(iH_0 - iH)e^{-iH(t-t_0)}e^{-iH_0t_0} \\ &= V_I(t)U(t,t_0). \end{aligned} \tag{113}$$

여기에서 $V_I(t)$는 (111)처럼 자유 해밀토니안에만 영향을 받는다.

$$V_I(t) = e^{iH_0t}Ve^{-iH_0t}. \tag{114}$$

식 (113)를 보면 시간에 대한 진행이 퍼텐셜 V_I로만 이루어진다. 앞서 보았던 것처럼 V가 작을 때 섭동을 사용해서 계산할 때 편리한 묘사는 상호작용 묘사(interaction picture)이다.

15 다이슨 전개

이제 섭동 결과가 어떤 모양으로 전개되는지 살펴보자. $U(t) = \exp[-i\int_{t_0}^{t} V_I(t)dt]$로 쓰면 좋겠지만, 이를 전개해보면 $V_I(t)$가 서로 다른 시각에서 교환 가능하지 않기 때문에 $[V_I(t), V_I(t')] \neq 0$, 순서 문제가 생긴다. (112)식에서 $U(t, t_0)$는 교환법칙이 성립하지 않으므로 $V_I(t)$도 마찬가지다. 대신 양변을 적분하면 적분 방정식이 된다.

$$U(t, t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} dt' V_I(t') U(t', t_0). \tag{115}$$

어떤 시각에서 같은 시각으로 '변하는' 것은 안 변하는 것이니 $U(t_0, t_0) = 1$이어야 하고, 이 때문에 상수항이 생긴다. V_I가 작다고 했으므로 이의 멱으로 시간진행 연산자를 전개하자.

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \ldots, \tag{116}$$

여기서, $U^{(k)}$는 V_I의 k제곱에 비례하게 작다. 식 (115)의 적분에 들어가면 V_I의 차수가 하나 더 올라가므로, 항끼리 비교해서 풀 수 있다. 마찬가지로 S 행렬도 V의 차수로 전개할 수 있다.

먼저 $U(t', t_0) = 1$을 넣으면

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= \langle \mathbf{p}'|U^{(1)}|\mathbf{p}\rangle = -i\int_{-\infty}^{\infty} dt' \langle \mathbf{p}'|e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}|\mathbf{p}\rangle \\ &= -i\int_{-\infty}^{\infty} dt' \langle \mathbf{p}'|e^{iE_{p'} t} V e^{-iE_p t}|\mathbf{p}\rangle = -2\pi\delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) T_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} \end{aligned} \tag{117}$$

를 구할 수 있고 이는 다이슨 전개를 한 것과 같다. 들어가고 나가는 상태는 자유 해밀토니안의 고유상태이고, 고윳값을 생각하면 시간 연산자는 수가 되어 V와 바꾸어 쓸 수 있다.

다음 항은

$$S^{(2)} = \langle \mathbf{p}'|U^{(2)}|\mathbf{p}\rangle = (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \langle \mathbf{p}'|V_I(t') \int_{-\infty}^{t'} dt'' V_I(t'')|\mathbf{p}\rangle, \tag{118}$$

운동량 완비성을 넣어 중간 상태를 생각하면

$$S^{(2)} = (-i)^2 \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} dt' \langle \mathbf{p}'|e^{i(E_{p'} - E_k)t'} V(t')|\mathbf{k}\rangle \int_{-\infty}^{t'} dt'' \langle \mathbf{k}|e^{i(E_k - E_p)t''} V(t'')|\mathbf{p}\rangle \tag{119}$$

가 된다. 시간은 $t' > t''$이어야 한다. t''에 대한 적분을 해보면 $t'' \to -\infty$에서 어떤 값을 얻어야 할 지 확실하지 않다. 이를 위해 적분 안에 $e^{\epsilon t''}$를 넣으면 이 범위에서 감쇠가

일어나 0이 된다. t''가 t'라는 고정된 값을 가지면 $\epsilon \to 0$이므로 없는 것과 마찬가지이다. 이를 함께 적분하면

$$\frac{ie^{i(E_p - E_k)t'}}{E_p - E_k + i\epsilon}. \tag{120}$$

을 얻는다. E_k는 상쇄되고, 다시 t'에 대해 적분하면 델타 함수를 주어 보른 전개를 한 것과 같은 결과

$$S = -m(2\pi)^2\delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \int d^3k \langle \mathbf{p}'|V|\mathbf{k}\rangle \frac{1}{E_{p'} - E_k + i\epsilon} \langle \mathbf{p}''|V|\mathbf{p}\rangle. \tag{121}$$

를 얻는다. 다시 생각해보면 $t'' \to -\infty$로 가는 들어가는 상태 $|\mathbf{p}\rangle$에서 잘 정의되는 적분을 얻으려 분모에 $+i\epsilon$을 넣은 셈이다. 이 부호가 리프만 슈빙거 방정식에 나오고 $|\mathbf{p}+\rangle$ 상태, Ω_+ 연산자에 $+$기호를 주게 된다.

16 여러 입자의 산란

두 입자의 산란을 생각해보자. 각각은 공간 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$에 들어 있으므로 이들은 파동함수

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \tag{122}$$

로 기술된다. 먼저 생각할 수 있는 것은 입자 하나를 기술하는 각 파동함수의 단순한 곱이다.

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \phi(\mathbf{x}_1)\psi(\mathbf{x}_2). \tag{123}$$

즉 파동함수의 힐버트 공간은 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$와 같은 구조를 가지고 있다고 보는 것이다. 두 입자가, 예를 들면 수소 원자와 전자처럼, 서로 다른 입자라면 이렇게 해도 된다. 나중에 양자역학적으로 동일한 입자를 생각하면 이를 수정해야 한다.

고전역학에서처럼 질량 중심과 상대 위치 좌표를 도입하고

$$\mathbf{X} = \frac{m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2. \tag{124}$$

이의 켤레 운동량을 도입하면

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p} = \frac{m_2\mathbf{p}_1 - m_1\mathbf{p}_2}{m_1 + m_2}, \tag{125}$$

교환 관계를 만족함을 알 수 있다.

$$[\mathbf{X}, \mathbf{P}] = [\mathbf{x}, \mathbf{p}] = i\hbar. \tag{126}$$

해밀토니안은 두가지 방법으로 쓸 수 있다.

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + V(\mathbf{x}) = H_{\rm cm} + \left[H_{\rm rel} \equiv \frac{\mathbf{P}}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \right], \tag{127}$$

여기에서

$$M = m_1 + m_2, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{128}$$

이다. 퍼텐셜이 $\mathbf{x}$는 상대위치에만 의존한다고 가정하면, 질량 중심 운동은 분리된다. (127)의 두번째 방법으로 해밀토니안을 보면 시간에 대한 진행을 나타내는 유니터리 변환은

$$U(t) = e^{-iH_{\rm cm}t} \otimes e^{-iH_{\rm rel}t} \tag{129}$$

이고 둘은 완전히 분리된다. 따라서 상대운동만 생각하면 $H_{\rm rel}$로 기술되는 입자 하나의 운동으로 환원된다. S 행렬도 마찬가지로 분리된다.

$$\mathbf{S} = \mathbf{1}_{\rm cm} \otimes S = \mathbf{1} - 2\delta(E_1' + E_2' - E_1 - E_2)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \times (-(2\pi)^2 m) f. \tag{130}$$

라고 쓸 수 있다. 여기서 $\mathbf{1}$은 모든 입자의 운동량 모든 성분이 따로따로 보존되는 델타 함수를 줄여 쓴 것이다. 주목할 것은, 입자 하나의 에너지와 운동량이 개별적으로 보존되지 않고, 두 입자의 에너지 합과 운동량 합이 보존된다. S 행렬의 정의상, 상호작용이 있다면 조금이라도 에너지와 운동량 교환이 있어야 한다. 그렇지 않은 것은 $\mathbf{1}$에 들어있다.

이를 세 개 이상의 입자의 상호작용으로 확장할 수 있다. 이때는 셋 중 둘만 참여하는 상호작용도 있을 것이고, 셋 모두 참여하는 상호작용도 있을 것이다. 이런 다른 상호작용의 경우를 채널(channel)이라고 한다. 일부만 상호작용하는 경우, 위에서 본 분리되는 성질을 이용하여, 운동에너지 항은 서로 다르게 묶을 수 있고, 퍼텐셜은 필요한 것만 생각하면 된다. 예를 들어 세 입자 a, b, c가 다음 퍼텐셜로 상호작용을 한다고 해보자.

$$V = V_{ab} + V_{bc} + V_{ac} + V_{abc}. \tag{131}$$

가령, b와 c가 속박상태 (bc)였는데 a가 충돌하여 이것이 분해되거나 $b + c$ 다른 에너지 준위의 속박상태 $(bc)^*$가 되면, 이를 기술하는 해밀토니안은

$$H = H_a + H_{bc,\rm cm} + H_{bc,\rm rel} + V_{bc} \tag{132}$$

만 생각하면 되고 나머지는 모두 구경꾼이다. 사실은 질량 중심 운동도 분리된다. 이를 사용하여 리프만 슈빙거 방정식을 풀면 된다.

모든 경우의 수를 다 따져보면 S 행렬은 다음처럼 분리된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{S} = \mathbf{1} &+ \delta^3(\mathbf{p}'_a - \mathbf{p}_a)\delta^3(\mathbf{p}'_b + \mathbf{p}'_c - \mathbf{p}_b - \mathbf{p}_c)\delta(E'_b + E'_c - E_b - E_c)f_{ac} \\ &+ \dots \\ &+ \delta^3(\mathbf{p}'_a + \mathbf{p}'_b + \mathbf{p}'_c - \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b - \mathbf{p}_c)\delta(\sum E' - \sum E)f_{abc}.\end{aligned} \tag{133}$$

산란 단면적 식은 입자 하나일 때와 조금 다르다. 질량 중심에서 산란 단면적에는 운동량의 비가 붙는다.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{p_f}{p_i}|f_{\text{ch}}(E,\theta)|^2, \tag{134}$$

이고 여기에서 ch는 해당하는 상호작용 채널을 가리킨다.

17 클러스터 분리

아주 멀리 있는 것끼리 상호작용하지 않을 조건을 생각해보자. 서울에서 전자와 뮤입자를 충돌시키는 실험은 뉴욕에서 양성자와 중성자를 충돌시키는 실험에 영향을 주지 않아야 한다. 즉 S 행렬은 분리되어야 한다.

$$S \underset{\Delta\to\infty}{\longrightarrow} S_{\text{서울}} \cdot S_{\text{뉴욕}} \tag{135}$$

지구 크기에서 보면 전자, 뮤입자, 양성자, 중성자를 들어가는 상태로 실험하여 a, b, c, d, e라는 입자가 생성되어 나갈 수 있다. 이를 좌변의 S 행렬이 기술한다. 서울에서 전자 뮤입자는 a, b를 생성하고, 뉴욕에서는 양성자 중성자는 c, d, e를 생성한다고 하면, 서울과 뉴욕의 거리 Δ가 멀기 때문에 이들의 S 행렬이 분리되어야 한다. 이를 클러스터 분리(cluster decomposition)라고 한다.

이를 보장할 수 있는 S 행렬의 꼴은, 역설적으로도 아홉 입자가 모두 참여하는 $V_{e\mu pnabcde}$가 인수분해 되지 않고, **모든 입자들이 상호작용에 참여**하는 것이다. 서울 실험이 뉴욕 실험에 서로 영향을 주지 않아야 하는 직관에 반하는 것 같다. 특별히 서울과 뉴욕의 상대적인 거리 Δ를 무한대로 보냈을 때

$$\Delta \to \infty \tag{136}$$

S 행렬이 (135) 처럼 분리되는 것이 된다. 꼭 이 묶음이 아니더라도 임의의 부분 상호작용을 생각하고 부분 실험들이 거리가 먼 곳에서 이루어지면 다른 극한에서 $\Delta' \to \infty$ 다르게 분리가 되어야 한다.

구체적으로, 모든 입자가 상호작용에 참여하는 S 행렬은 운동량의 총량만 보존하고

$$\delta^{(3)}(\sum_{abcde} \mathbf{p}' - \sum_{e\mu pn} \mathbf{p}), \tag{137}$$

작은 델타 함수로 인수분해되어 일부만 보존하지 않아야 한다. 왜냐하면 서울의 실험만 따로 떼어내기 위하여 병진이동 연산자를 가하면 (생성자는 운동량 연산자) 파동함수에 위상

$$e^{i\Delta(\sum_{ab} \mathbf{p}' - \sum_{e\mu} \mathbf{p})} \tag{138}$$

이 추가된다. $\Delta \to \infty$로 보내면 S 행렬이 분리될 것이다. 그런데 만약 델타 함수가 인수분해가 안되는 꼴 (137)이 아니라면

$$\delta^{(3)}(\sum_{ab} \mathbf{p}' - \sum_{e\mu} \mathbf{p})\delta^{(3)}(\sum_{cde} \mathbf{p}' - \sum_{pn} \mathbf{p}) \tag{139}$$

이라면 (138)의 위상이 0이 된다. Δ의 의존성이 없어져서 무한대로 떨어뜨려 놓을 수가 없는 것이다. 따라서, 상호작용 일부를 언제라도 떨어뜨릴 수 있으려면 델타 함수는 운동량 총합을 보존하고, 한다. 참여하는 모든 입자가 조금이라도 서로 운동량을 주고받으며 변해야 하는 것이다. (그렇다면 온 우주의 모든 입자들은 상호작용을 한꺼번에 해야 할까?)

클러스터 분리를 자동으로 만족하는 방법은 양자 마당(quantum field)을 도입하는 것이다. 파동함수가 고정된 것이 아니라, 생성자를 통하여 입자 하나의 파동함수가 추가되며 소멸자를 통하여 파동함수가 감소되는 것이다. 왜냐하면 상호작용을 정상 순서(normal ordering)로 만들어서

$$H_{I,M',M} = \int d^3k_1 \dots d^3k_1 \dots h_{M'M}(\mathbf{p}'_1, \dots, \mathbf{p}'_M \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_M) a^\dagger(\mathbf{p}'_1) a^\dagger(\mathbf{p}'_M) a(\mathbf{p}_1) \dots a(\mathbf{p}_M) \tag{140}$$

로 만들면 정확히 M개의 상태를 소멸하여 M'개의 상태를 생성하기 때문에 $M + M'$개의 입지가 상호작용에 다 참여하고 병진 대칭에 따라 운동량 전체가 보존되기 때문이다. 해밀토니안을 이렇게 쓰는 것은 결국 양자마당의 조합으로 쓴다는 것이다. 양자마당은 생성자 소멸자의 선형 결합으로 되어 있고, 파동함수를 일반화한 상태함수를 만들게 된다.

여러 입자의 파동함수는 비어 있는 파동함수 $|0\rangle$ (모든 소멸자에 대하여 소멸되는 상태로 정의한다)에 생성자를 가하여 만든다.

$$|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_M\rangle = a^\dagger_{\mathbf{p}_1} a^\dagger_{\mathbf{p}_2} \dots a^\dagger_{\mathbf{p}_M} |0\rangle. \tag{141}$$

여러 입자는 같은 성질을 가진 연산자로 만들기 때문에 구별되지 않는 동일한 입자들 (identical particles) 이다. 이 생성자들이 어떤 교환법칙을 만족하느냐에 따라 보손과 페르미온 관계를 갖는다.

$$a^\dagger_{\mathbf{p}_i} a^\dagger_{\mathbf{p}_j} \mp a^\dagger_{\mathbf{p}_j} a^\dagger_{\mathbf{p}_i} = 0, \quad a_{\mathbf{p}_i} a^\dagger_{\mathbf{p}_j} \mp a^\dagger_{\mathbf{p}_j} a_{\mathbf{p}_i} = \delta^{(3)}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j). \tag{142}$$

교환법칙을 만족하면(− 부호) 보손, 반교환법칙을 만족하면(+ 부호) 페르미온이다. 이러한 연산자를 사용하면, 파동함수의 입자를 교환할 때 보손, 페르미온의 대칭성이 자동으로 보장된다. † 기호가 없는 소멸 연산자도 첫번째와 똑같은 관계를 만족한다. 자세한 내용은 다체계 강의를 참조하시오.

그러면 상호작용을 푸리에 변환했을 때

$$h_{N'N'}(\mathbf{p}'_1 \dots \mathbf{p}'_M \mathbf{p}_1, \dots \mathbf{p}_M) = \delta^{(3)}(\mathbf{p}'_1 + \dots + \mathbf{p}'_M - \mathbf{p}_1 - \dots - \mathbf{p}_M) f \tag{143}$$

이 된다. 파동함수를 만들기 위해 이렇게 양자화를 한번 더 하는 것을 이차 양자화 (second quantization)이라고 한다. 생성자와 소멸자를 선형 결합한 것을 마당(field) 이라고 한다.

양자 마당 이론에서는 해밀토니안이 주로 양자 마당으로 쓰여진다. 물론 여전히 운동량을 확장한 에너지-운동량들의 내적도 쓰인다.

18 로런츠 공변화

4벡터에 대한 로런츠 변환은 다음과 같다.

$$x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \tag{144}$$

여기에 병진 변환을 더 생각하면 $(+a^\mu)$ 포앙카레 변환으로 확장할 수 있다. 다른 대상 (스피너, adjoint등)에 대해서는 다른 표현(representation)을 갖는다. 에너지 운동량도 4벡터이므로 같은 변환을 통하여 변하며

$$|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots \mathbf{p}_n\rangle \to U(\Lambda)|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots \mathbf{p}_n\rangle = |\Lambda\mathbf{p}_1, \Lambda\mathbf{p}_2, \dots \Lambda\mathbf{p}_n\rangle \tag{145}$$

처럼 변한다. 이는

$$p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2, \quad E_{\mathbf{p}} = p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \tag{146}$$

이 불변이다.

S 연산자는 로런츠 불변이어야 한다

$$S = U(\Lambda)SU^\dagger(\Lambda). \tag{147}$$

따라서, $H = H^0 + V$도 로런츠 변환에 대해 불변해야 한아. 앞서 다이슨 전개에서 보았듯, V_I도 로런츠 불변이어야 한다.

$$U(\Lambda)V_I U^\dagger(\Lambda) = V_I(\Lambda x). \tag{148}$$

퍼텐셜이 모두 로런츠 불변이면 된다. 상수와 운동량의 내적 $p_i \cdot p_j, p_i \cdot p'_j$ 등이 로런츠 불변인 스칼라이다.

19 인과성

서로 공간처럼(spacelike) 떨어져있는 두 점 x, y에 대해서 해밀토니안 $V_I(x), V_I(y)$은 서로 영향을 주고받을 수 없다

$$[V_I(x), V_I(y)] = 0, \quad (x-y)^2 < 0. \tag{149}$$

클러스터 분리와 비슷하지만 이 경우는 아무리 가까워도 빛보다 빠른 신호로 전달할 수 없다는 점에서 다르다. 이의 간단한 버전인 스칼라 마당 $V_I(x) = \phi(x)$의 인과성을 살펴보자.

스칼라 마당을 푸리에 전개한 것은

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}(a_{\mathbf{k}}e^{-ik\cdot x} + a^{c\dagger}_{\mathbf{k}}e^{ik\cdot x}) \tag{150}$$

처럼 다양한 운동량 $\mathbf{k}$을 가지는 평면파들의 선형결합이다. 에너지는 $i\partial_t$의 고윳값 k_0임을 기억하고, $k_0 > 0$이라고 가정하자. $\phi(x)$는 입자를 x에서 소멸시키고, 같은 자리에서 반입자를 생성한다. 스칼라 마당이 에르미트 (수의 경우 실수에 해당)라면 $a^{c\dagger} = a^\dagger$이 되어야 한다. 여기에서는 설명하지 않지만, 이 마당이 전하를 가지기 위해서는 에르미트가 아니어야 한다 (복소수에 해당).

$a^{c\dagger}_{\mathbf{k}}$항의 에너지가 음이 되는 것처럼 보이는데 ($e^{ik_0t}$의 에너지 고윳값은 $-k_0$), 이 연산자가 만드는 입자를 에너지가 음인 입자라고 하는 대신 $k_0t = (-k_0)(-t)$로 놓고 에너지가 양인 반입자라고 한다. 대신, 시간을 거슬러 올라간다. 우리는 S 행렬과 이에 따른 산란 단면적만 관찰할 수 있기 때문에 입자가 시간을 거슬러 올라가는 과정은

볼 수 없고 결과론적인 것이다. 이 입자가 전하를 띠었다면, 생성/소멸 과정에서 전하 차이는 같다.

이 마당의 에르미트 켤레

$$\phi^\dagger(y) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k'}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}}(a^c_{\mathbf{k}'}e^{-ik'\cdot y} + a^\dagger_{\mathbf{k}'}e^{ik'\cdot y}) \tag{151}$$

는 반대 역할을 한다. 입자를 y에서 생성하고, 같은 자리에서 반입자를 소멸시킨다. 이들의 교환자는

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2E_{\mathbf{k}}}(e^{-ik\cdot(x-y)} - e^{ik\cdot(x-y)}) = D(x-y) - D(y-x), \tag{152}$$

결국 전파자들(전파자는 다음 장에 나오며, 앞서 나온 그린 함수에 시간 미분을 추가한 것이다)의 차이이다. 이 두 항은 **각각** 로런츠 불변량이다. 적분 측도도, 4벡터의 내적도 모두 불변이기 때문이다. 따라서 빛원뿔 바깥에 있는 점 x, y는 로런츠 변환을 통해서 $-x, -y$로 보낼 수 있다. 그러면 두 항은 상쇄되어 0이 된다.

양자마당 이론에서 국소성이 구현되는 방식이 이상하다. 첫번째 항은 입자가 시공간 좌표 y에서 생성되어 x에서 소멸되는 진폭을 나타낸다. $x_0 > y_0$이어야 인과관계가 성립할 것이다. 두번째 항은 반입자가 x에서 생성되어 y에서 소멸되는 진폭이다. 이 둘이 상쇄되는 것이다. 반입자는 시간을 거꾸로 타고, 미래의 시공간 좌표 x에서 과거의 시공간 좌표 x로 가는 것처럼 보였다. 결과적으로 이 두 효과가 상쇄된다. 아무 일도 안 일어나는 상대론의 인과론 조건을 양자 마당 이론이 기술하는 방식이다. 만약 입자와 반입자의 질량이 다르면(CPT 대칭이 깨져야 한다) $\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2} = k_0 = k'_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2+m^{c2}}$이 될 수 없어 상쇄가 일어나지 않는다. 국소성이 반입자의 존재를 필요로 한다. 따라서 스칼라 마당 (150)의 두 항 중 한 항만 쓰는 이론에는 인과성이 없다.

20 전파자

앞서 그린함수(44)를, 공간 $\mathbf{x}$에 있는 파동함수를 $\mathbf{x}'$에 있는 파동함수로 바꾸어주는 적분변환의 알맹이라고 해석했다. 상태 $\mathbf{p}'$가 시공간 x에서, 그리고 상태 $\mathbf{p}$가 y에서 발견될 진폭은

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle &= \langle 0|\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}}a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x}\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}a^\dagger_{\mathbf{p}'}e^{ip'\cdot y}|0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}}\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}e^{-ip\cdot(x-y)}\langle \mathbf{p}'|\mathbf{p}\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}e^{-ip\cdot(x-y)} \equiv D(x-y)\end{aligned} \tag{153}$$

이다. 전개 (150), (151)에서 살아남는 항만 썼다. 두 시공간 좌표의 시간차 $x^0 - y^0$가 있다면 양자마당이 기술하는 무언가가 이동한다는 말이다. $x^0 > y^0$인 경우, 첫줄의 생성자와 소멸자 구조를 보면, 양자마당이 y에서 생성되서 x로 소멸한다고 해석할 수 있다. 이 양이 0이 아닌 것은 입자가 y에서 x로 갈 확률이 있다고 해석해야 할 것이다.

그런데 첫줄 좌변 연산자의 순서를 바꾸어도 해석은 비슷하지 않을까?

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle &= \langle 0|\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}} a^c_{\mathbf{p}} e^{-ip\cdot y}\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}} a^{c\dagger}_{\mathbf{p}'} e^{ip'\cdot x}|0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip\cdot(y-x)} = D(y-x)\end{aligned} \tag{154}$$

도 상태 $\mathbf{p}$가 시공간 x에서, 그리고 상태 $\mathbf{p}'$가 y에서 발견될 진폭이라고 보아야 할 것이다. 여기에서는, 생성 소멸 연산자를 잘 보면, **반입자**가 x에서 생성되어 y에서 소멸된다. 그러면 시간이 $y^0 > x^0$이 되어야 한다. 즉, 시간 순서가 반대가 되면 반입자가 마당을 이동시킨다.

이처럼 시간의 선후 관계에 따라 입자, 반입자가 선택되도록 하는 전파자가 있다. 파인만 전파자이다.

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{155}$$

앞서 그린 함수를 공부했으므로, 이는 상대론적인 스칼라 입자를 기술하는 클라인 고든 방정식 $(\partial_t^2 - \nabla^2 - m^2)\phi(x) = 0$에 대한 그린 함수이다. 정말로 이 양은 로런츠 공변이라는 것을 알 수 있다. 로런츠 공변을 만족하면서 입자가 전파하는 것은 시간 순서에 따라 입자 또는 반입자가 전파하는 것이다. 분모 $(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + i\epsilon$의 극(pole)은 $p^0 = \pm(E_p - i\epsilon)$에 있다. $x^0 > y^0$일때 경로를 아래로 잡아야 적분이 수렴하고, 여기에 들어가는 극은 $p^0 = E_p - i\epsilon$이므로 이를 넣어 유수(residue)를 구해보면 $D(x-y)$가 나온다. $x^0 < y^0$일때는 경로를 위로 잡고, 극은 $p^0 = -E_p + i\epsilon$를 넣어야 하므로 $D(y-x)$가 나온다. 즉

$$D_F(x-y) = \langle 0|T\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle \tag{156}$$

이다.

전파자는 앞서 보았던 그린 함수이고, $(x^0, \mathbf{x})$에 있는 상태를 $(y^0, \mathbf{y})$으로 바꾸어주는 적분방정식의 커널(kernel)이다. 비상대론적 양자역학에서 에너지 고윳값 E_p가 $i\partial_t$의 기댓값이고, 자유 해밀토니안의 에너지 연산자가 ∇^2였던 것을 기억하면 양자마당이론의 전파자도 똑같은 모양을 갖는다. 차이가 있다면 질량이 정지 에너지라는 것이다.

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p_0^2 - E_{\mathbf{p}}^2 + i\epsilon}. \tag{157}$$

처럼 쓰면 적분은 사실상 (46)와 같아지고 같은 방법으로 적분하면 위의 결과를 얻는다.

21 상호작용

양자역학에서는 다이슨 전개가 리프먼 슈빙거 방정식의 보른 전개와 일치하지만 더 큰 확장성을 가진다.

상호작용은 양자 마당으로 쓰여지므로 시간에 따른 상태 변화는 파동함수가 아니라 양자 마당과 상호작용에 있다는 하이젠베르크 묘사가 적합하다. 그런데 우리는 퍼텐셜이 작다고 가정하여 섭동을 생각하므로, (113) **퍼텐셜에서 오는 시간에 대한 변화만** 생각하면 된다.

양자 마당 이론은 상대론을 생각하는데, 상태를 만드는 마당은 로런츠 변환에 대한 표현이기 때문에 시간과 공간에 모두 의존한다. 다이슨 전개는 시간을 명시적으로 나타내기 때문에 시간 순서를 잘 따질 수 있다. 즉, 양자 마당 이론에서는 상호작용 묘사를 그대로 쓴다.

양자 마당 이론에서는 파동함수가 고정된 것이 아니라 양자 마당이 가해지면서, 하나의 입자가 여러 입자가 될 수도 있고, 입자의 개수가 불변이 아니다. 예를 들어 상호작용이

$$V_I = \int d^3x \phi(x)^{\dagger 2} \phi(x)^2 \tag{158}$$

인 경우, $|0\rangle$ 입자와 반입자 합쳐 4개를 만들 수 있다. 다이슨 전개를 통하여 그린 함수를 붙이면 입자 하나가 전파하다가 세개의 입자로 붕괴(decay)하는 것이 된다. 높은 차수로 전개하면 이들이 다시 합쳐져서 입자 하나가 될 수도 있다. 모든 경우 일반적으로 입자의 갯수가 보존되지 않는 다체계 함수가 되어야 한다. 그래도 불변하는 것이 있다. 상호작용이 에르미트이면 입자와 반입자의 개수 차이가 보존된다.

22 상대론적인 S 행렬 이론

상대론을 반영하여 S 행렬의 이론을 따로 발전시킬 수 있다. 기본 원리는 다음과 같다:

1. 상대성: S 행렬은 포앵카레 군의 한 표현이다.

2. 유니터리: $SS^\dagger = S^\dagger S = 1$.

3. 해석성(analytiucity): 해석적 복소함수이며 적분 관계와 특이점 조건을 갖는다.

상대론을 생각하면 시간과 공간이 하나의 개념으로 취급되기 때문에 입자가 시간에 따라 충돌하는 것과 입자들이 쌍생성 쌍소멸 하는 것이 같다. 가령, 전자와 반전자가 힘을 주고 받는 $e^-e^+ \to e^-e^+$ 산란은 두 입자의 운동량 합을 제외하고는 입자과 반입자가 쌍소멸했다가 쌍생성하는 것과 f의 크기가 같다. 이 성질을 크로싱(crossing)이라고 한다. 두 입자가 들어오고 두 입자가 나갈 때 운동량 $\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_4$로 기술되고 이에 대한 로런츠 불변량은

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_2 + p_3)^2, \quad u = (p_1 + p_3)^2 \tag{159}$$

로 쓸 수 있고, 이들은

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \tag{160}$$

를 만족한다. s와 t를 바꾼 것이 앞서 이야기한 전자 반전자 상호작용의 로렌츠 공변성이다.

또 중간에 광자를 생각하면 S 행렬은 운동량 차가 0인 지점에서 극을 갖는다. 전자와 반입자의 산란에서 교환되는 운동량 차이 제곱을 s라고 하면 산란 행렬은 다음과 같은 극한을 갖는다.

$$s \to 0 : S \to \frac{a}{s} \tag{161}$$

여기에서 a은 어떤 상수이다. 이를 푸리에 변환하면 쿨롱 퍼텐셜을 얻게 된다. 분모를 $q^2 - m_\gamma^2$이라고 생각하면 광자의 질량이 0인 것이다. 초기에 강한 상호작용은 π입자와 같은 중간자의 교환으로 생각하게 되었다. 이 경우 극은 $s = m_\pi^2$에서 극을 갖게 된다. 이는 유카와 퍼텐셜을 준다. 앞서 했던 그린함수의 적분하고 똑같은 방법으로 적분하면

$$V(r) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{a}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2} = \frac{a}{4\pi^2} \int_0^\infty q^2 \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} \frac{a}{q^2 + m_\pi^2} = \frac{a}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-m_\pi r}. \tag{162}$$

S 행렬을 s의 함수로 볼 때, 중간에 매개하는 입자의 질량에서 극이 나오는 것을 란다우 원리(Landau principle)이라고 한다. 중간에 어떤 질량을 가진 매개 입자가 있어야 하는지를 알면 S 행렬을 구축할 수 있다.

앞서 본 마당들의 인과성은 S 행렬에서 크래머스 크로니그 관계로 나타낸다.

23 광학 정리

산란 단면적 관계에서 바로 나오는 정리가 있다. 산란 단면적 연산자는 자명한 부분과 상호작용을 정말 하는 부분으로 나눌 수 있으며 이는 유니터리이다.

$$S = \mathbf{1} - \frac{i}{2\pi m} f, \quad S^\dagger S = S S^\dagger = 1 \tag{163}$$

이다. 이를 평면파의 완비성 $\mathbf{1} = \int d^3p |\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|$을 이용하여 전개하면

$$f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) - f^*(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}') = \frac{i}{2\pi m} \int d^3k \delta(E_p - E_k) f^*(\mathbf{k} \leftarrow \mathbf{p}') f^*(\mathbf{k} \leftarrow \mathbf{p}) \tag{164}$$

이다. 여기에 $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$라고 놓으면

$$\operatorname{Im} f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}) = \frac{p}{4\pi} \int \Omega_{\mathbf{k}} |f(\mathbf{k} \leftarrow \mathbf{p})|^2 \tag{165}$$

가 된다.

산란 진폭 f는 일반적으로 복소수이며, 실험으로 이의 크기를 잴 수 있을 뿐 아니라 허수부도 잴 수 있다. 이는 S 행렬의 유니터리 성질에만 의존하므로 상대론적인 산란에도 적용할 수 있다. 어떤 상호작용이 중간 과정을 거쳐 일어나면, 이 크기는 가능한 중간과정의 진폭 제곱을 모두 더한 것과 같다는 것이다.

24 레제 이론

한편 요스트 함수는 $\mathsf{f}_l(E)$를, 주어진 E에 대해, l의 함수로 생각할 수 있다. 원래 식 (84)은 l이 자연수일때 얻었지만, 이를 복소수로 확장할 수 있다. 퍼텐셜이 없을 때 $r \to 0$이면 두 해는 r^{l+1}과 r^{-l}로 접근하고, 퍼텐셜이 있어도 앞의 조건을 만족하면 l이 0보다 살짝 작아도 수렴한다. $\operatorname{Re} l = -\frac{1}{2}$이면 이 둘의 역할이 바뀌므로 요스트 함수 $\mathsf{f}_l(E)$는 $\operatorname{Re} l > -\frac{1}{2}$에서 분석함수가 된다.

정해진 에너지 E에 대하여 $f_l(E)$가 극(pole)를 갖는 각운동량 l들을 찾아볼 수도 있다. 이 극들의 위치 $l = \alpha(E)$를 레제 자취(Regge trajectory)라고 한다.

자연에 관찰되는 강입자들 가운데 질량 제곱과 l이 비례하는 것들이 있다.

$$l = \alpha(E = m^2) = \alpha' m^2 + \alpha(0) \tag{166}$$

질량을 상대론적인 에너지라고 생각하면 이들은 입자들의 속박 상태이다. 이 그림은 강입자들에 대한 레제 자취이다[Klempt, Metsch 12]. 이를 QCD(또는 적당한 퍼텐셜)로 설명하는 것은 아직까지 풀리지 않은 문제이다.

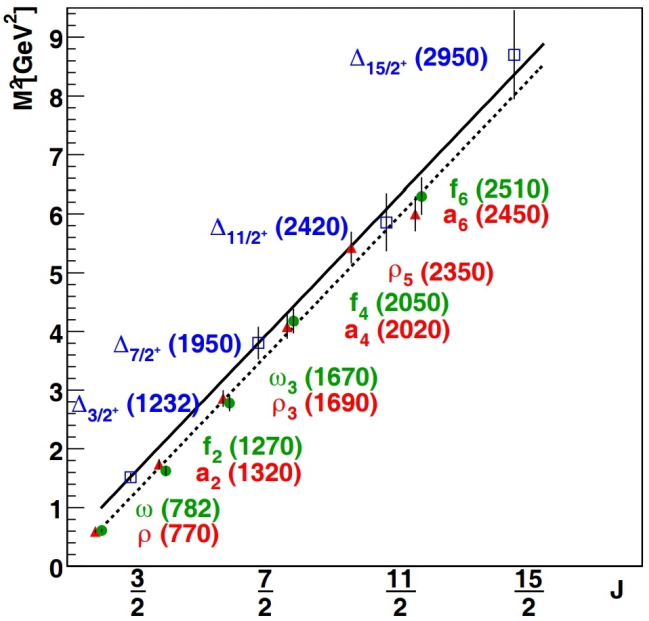


Fig. 1. The leading Regge trajectory: Δ resonances with maximal J in a given mass range. Also shown is the Regge trajectory for mesons with $J = L + S$.

이 속박 상태가 강입자가 아닌 기본 양자 마당(quantum field)이라고 생각하면 어떨까? 잘 만들면 스핀 2인 기본입자(중력자!)가 질량이 0이 될 수 있다.